

SCOODLE

NIEUWE DELTA-T

5/6

INTEGRALEN VAN VEELTERMFUNCTIES
LEERPLAN B

Jos Casteels
Danielle De Vos
Frederik Smessaert
Carl Van Hove

Plantyn

DIT BOEK BIEDT MEER

ACTIVEER ONLINE IN 3 STAPPEN

SCOODLE

1 KRAS

Op de achterkant van dit boek vind je **een code onder een kraslaag.**
Met die code kun je je boek online activeren.



2 ACTIVEER



Ga naar www.scoodle.be/activeer
en volg de instructies.

3 KLAAR!

Nu is je boek online geactiveerd.
Zo heb je toegang tot de digitale content bij deze uitgave.



VOORWAARDEN

Nadat je de code geactiveerd hebt, heb je een schooljaar lang toegang tot de digitale content bij deze uitgave. Uitgaven waarvan de code gekrast is, worden niet teruggenomen of omgeruild. Bij vragen over de activatie of het gebruik kun je steeds terecht bij onze helpdesk, via helpdesk.plantyn.com.

Nieuwe Delta-T

leermap 5/6
integralen van veeltermfuncties

Jos Casteels
Danielle De Vos
Frederik Smessaert
Carl Van Hove

Plantyn

Ontwerp binnenwerk: Composition
Zetwerk binnenwerk: Composition
Ontwerp omslag: The Line
Tekeningen: Stefaan Provijn
Illustratieverantwoording: © Africa Studio - Fotolia.com, © Björn Wylezich - Fotolia.com, © harlequin9 - Fotolia.com, © mrallen - Fotolia.com, © Pefkos - Fotolia.com, © shokultd - Fotolia.com, © Vacclav - Fotolia.com, © VRD - Fotolia.com, Corbis, Imageselect, iStockphoto, neftali/Shutterstock.com, Trudy Wilkerson/Shutterstock.com, Wikipedia/Quistnix
Met dank aan: Truckstar

Auteurs DELTA-T en NIEUWE DELTA-T
Gerda Barberien, Jos Casteels, Peter Crokaerts, Danielle De Vos, Luc Goris, Geert Heynickx, André Huysmans, Els Jacobs, Roland Rottiers, Jos Salaets, Frederik Smessaert, Conny Van den Brande, Luc Van den Broeck, Annick Van den put, Katrijn Van Eekert, Carl Van Hove

Redactie: Jos Casteels, Frederik Smessaert

NUR 128

ISBN 978-90-301-4917-0 23647/0 D2016/0032/0106

Plantyn
Motstraat 32, 2800 Mechelen
T 015 36 36 36
F 015 36 36 37
klantendienst@plantyn.com
www.plantyn.com

Dit boek werd gedrukt op papier van verantwoorde herkomst.

1 Integralen van veeltermfuncties

1.1 Oppervlaktefuncties
Variabele oppervlakte 8
Afgeleiden van oppervlaktefuncties 16

1.2 Onbepaalde integralen
Het omgekeerde van afleiden 23
Onbepaalde integralen van veeltermfuncties 28

2 Bepaalde integralen van veeltermfuncties

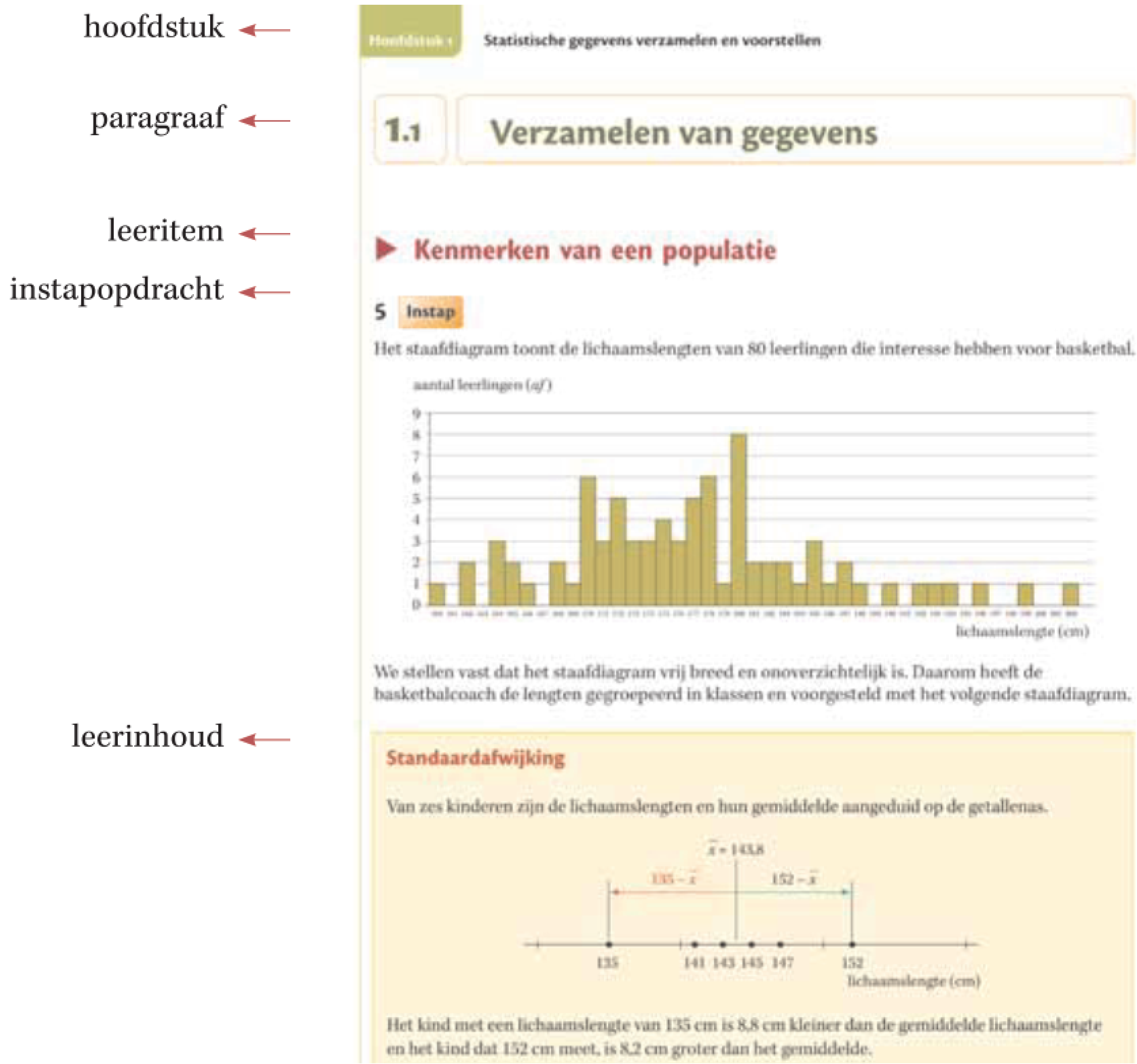
2.1 Bepaalde integralen
Sommeren en integreren 46
Hoofdstelling van de integraalrekening 62
Integraal en oppervlakte 68
Integralen van machten 90

2.2 Toepassingen
Oppervlakte tussen grafieken 99
Volume van omwentelingslichamen 107
Tijdsafhankelijke processen 113
Arbeid bij variabele krachten 119

De leermap **NIEUWE DELTA-T Integralen van veeltermfuncties** is in hoofdzaak bestemd voor leerlingen uit de derde graad van de TSO-studierichtingen en de KSO-studierichtingen die leerplan b volgen.

Opbouw van de leermappen Nieuwe Delta-T

Elk hoofdstuk wordt ingeleid met een passende opening over het te bestuderen onderwerp. De genummerde paragrafen van elk hoofdstuk bestaan uit een aantal leeritems. Elk leeritem wordt ingeleid met een instapopdracht.



Elk hoofdstuk begint met een inhoudstafel die aanwijst op welke pagina elk leeritem staat.
In elk leeritem wordt de theorie compact uitgelegd en toegepast op concrete voorbeelden.
De soort leerinhoud is herkenbaar aan de **achtergrondkleur**.

Kennis en rekenregels om de opdrachten te kunnen uitvoeren.

Doelgericht gebruik van de rekenmachines TEXAS INSTRUMENTS en CASIO.

Vaardigheden om vlot te kunnen meten, schetsen en tekenen.

Extra leerinhouden om uitbreidingsdoelstellingen te realiseren.

Didactisch gerangschikte opdrachten zorgen voor een systematische verwerking van de leerinhouden.

Instap Leeritems worden ingeleid met probleemstellingen uit de praktijk.

De moeilijkheidsgraad van de opdrachten is aangegeven met gekleurde vierkantjes.

Eenvoudige opdrachten

Opdrachten met een bijkomende moeilijkheidsgraad

Opdrachten met een hogere moeilijkheidsgraad

Oefenopdrachten op de uitbreidingsleerstof worden aangegeven met een schaduwvlakje.

Instap

Elke paragraaf wordt afgesloten met **Uitdagingen**.

De **Uitdagingen** laten voldoende ruimte voor begeleid zelfstandig leren of zelfstandig leren en helpen de verschillen in studietempo opvangen.

Uitdagingen

1 In een klas scoorden de meisjes gemiddeld 8,5 en de jongens 7,4 op een toets wiskunde.
Het gemiddelde van de klas is 8. Er zitten 12 meisjes in die klas.
Hoeveel leerlingen telt deze klas?

(A) 16 B (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 24

Vlaamse Wiskunde Olympiade

In de **Exploraties** komen onderwerpen aan bod die binnen of buiten de wiskunde liggen.

Exploratie

Kerncijfers

De Algemene Directie Statistiek en Economische Informatie van de FOD Economie heeft de opdracht om aan de informatiebehoeften van de overheid, de bedrijfswereld en de burgers te voldoen door hen actuele cijfers over de toestand van het land aan te bieden.

De brochure ‘Kerncijfers’ geeft een overzicht van wat er aan basisgegevens beschikbaar is.

Het **trefwoordenregister** geeft aan op welke pagina we de nodige informatie kunnen terugvinden.

Trefwoordenregister

A

Absolute frequentie **35**
Absolute frequentiedichtheid **61**
Aselecte steekproef **20**

1

Integralen van veeltermfuncties

De digitale tachograaf van een vrachtwagen registreert op elk moment de rij- en rusttijden van de chauffeur, de snelheid van het voertuig, de afgelegde afstand en onregelmatigheden. Alle gegevens kunnen verwerkt worden tot een grafiek.

Doordat de snelheid per seconde over de laatste 24 uur geregistreerd wordt, kan bij een verkeersongeval een deskundige een antwoord geven op volgende vragen:

- Wat is de botsingssnelheid?
- Hoelang is de remtijd?
- Hoeveel meter is de remweg?

Aan de hand van de bekomen informatie aangevuld met fotomateriaal kan een reconstructie van het ongeval gemaakt worden.

Hoe we de afgelegde weg uit de snelheidsgrafiek berekenen, onderzoeken we in dit hoofdstuk.

1.1 Oppervlaktefuncties

Variabele oppervlakte 8
Afgeleiden van oppervlaktefuncties 16
Uitdagingen 20

1.2 Onbepaalde integralen

Het omgekeerde van afleiden 23
Onbepaalde integralen van veeltermfuncties 28
Uitdagingen 41



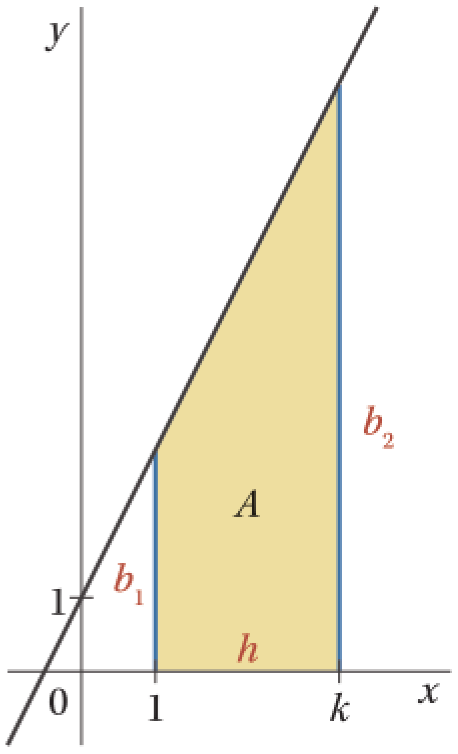
Foto: Truckstar

1.1 Oppervlaktefuncties

Variabele oppervlakte

1 Instap

Gegeven is een trapezium gelegen onder de rechte $y = 2x + 1$.



1 Schrijf de oppervlakteformule voor een trapezium met hoogte h en evenwijdige zijden b_1 en b_2.

....

2 Bereken de oppervlakte van het trapezium in functie van k.

....

....

....

....

....

3 Als we k gelijkstellen aan 3, wat is dan de oppervlakte?

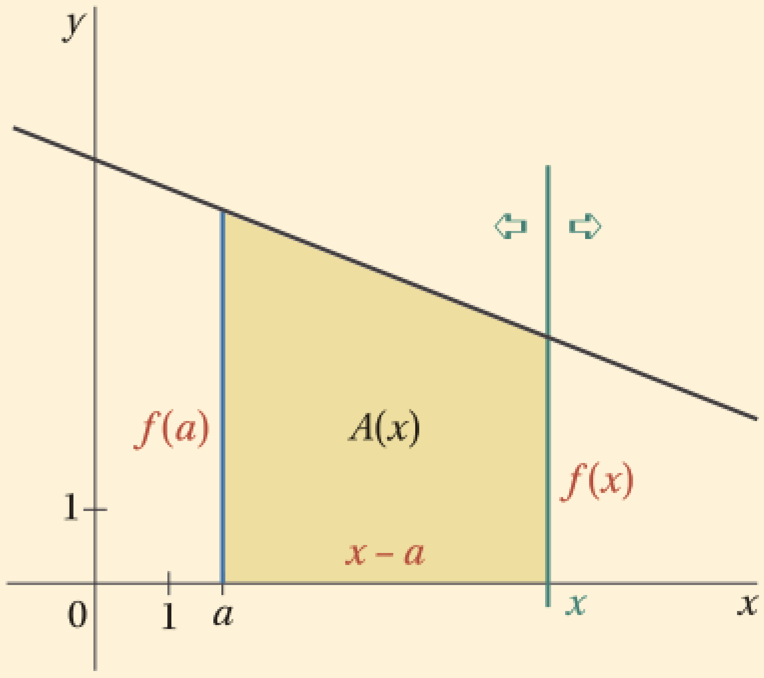
....

4 Wat is de oppervlakte als de lengte van het interval $[1, k]$ gelijk is aan 4?

....

Variabele oppervlakte en oppervlaktefunctie

Een gebied ligt boven de x-as en onder de rechte $y = f(x)$. Links is het gebied begrensd door een vaste verticale $x = a$ en rechts door een veranderlijke verticale. De oppervlakte van het gebied is bijgevolg een functie van x.



De oppervlakte $A(x)$ kunnen we berekenen met functiewaarden van f.

$$A(x) = \frac{\left(f(a) + f(x)\right) \cdot (x - a)}{2}$$

$$A = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$$

$b_1 = f(a)$ $\quad b_2 = f(x)$ $\quad h = x - a$

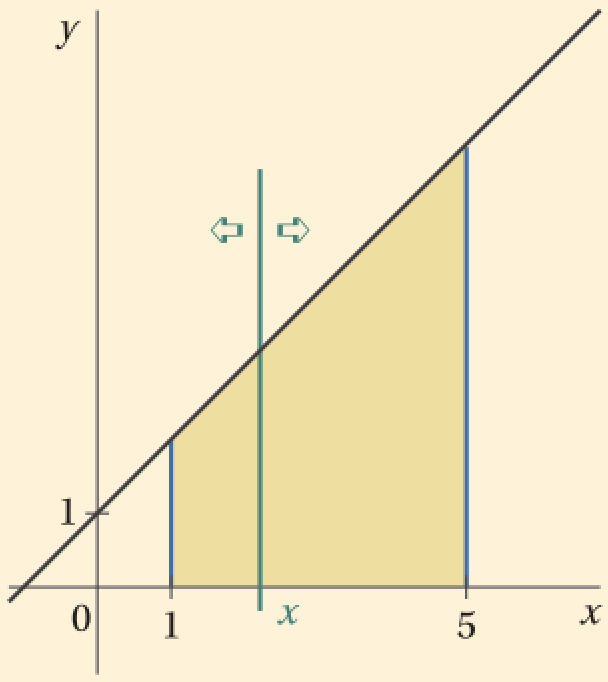
De functie $A(x)$ die de **variabele oppervlakte** van het gebied beschrijft, noemen we de **oppervlaktefunctie** van de functie f over het interval $[a, x]$.

Merk op

De oppervlakteberekening met $A(x)$ geldt enkel voor intervallen $[a, x]$ waarin de grafiek van f **boven** de x-as ligt.

Voorbeeld

Gegeven is de rechte $y = x + 1$. We bepalen de oppervlaktefunctie over het interval $[1, x]$ en berekenen hiermee de oppervlakte van het gekleurde gebied.



Oppervlaktefunctie A van $f(x) = x + 1$ over het interval $[1, x]$

$$A(x) = \frac{(f(1) + f(x)) \cdot (x - 1)}{2}$$

$$A(x) = \frac{(f(a) + f(x)) \cdot (x - a)}{2} \quad \text{met } a = 1$$

$f(x) = x + 1 \quad f(1) = 1 + 1 = 2$

$$= \frac{(2 + (x + 1)) \cdot (x - 1)}{2}$$

$$= \frac{(x + 3) \cdot (x - 1)}{2}$$

$$= \frac{x^2 - x + 3x - 3}{2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{2}$$

$$= 0{,}5x^2 + x - 1{,}5$$

Oppervlakte trapezium

$A(5) = 0{,}5 \cdot 5^2 + 5 - 1{,}5 = 16$

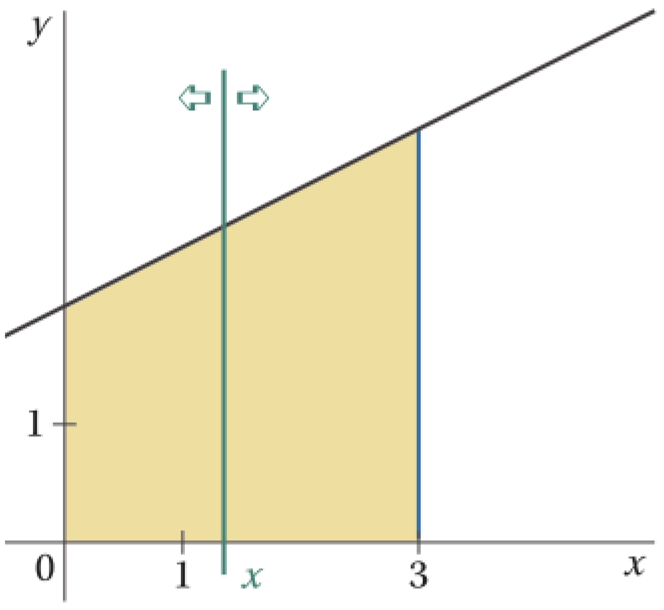
2

Gegeven is de rechte $y = f(x)$.

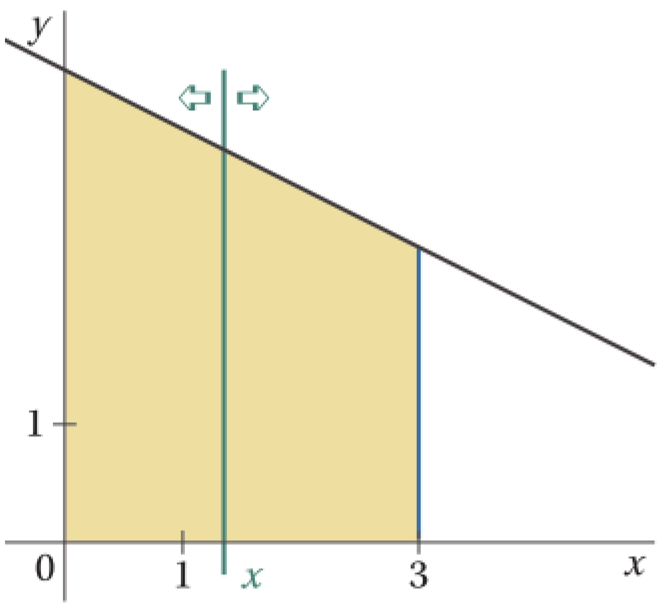
a Bepaal de oppervlaktefunctie over het interval $[0, x]$.

b Bereken hiermee de oppervlakte van het gekleurde gebied.

1 $y = 0{,}5x + 2$



2 $y = -0{,}5x + 4$



a ....

....

....

....

....

a ....

....

....

....

....

b ....

b ....

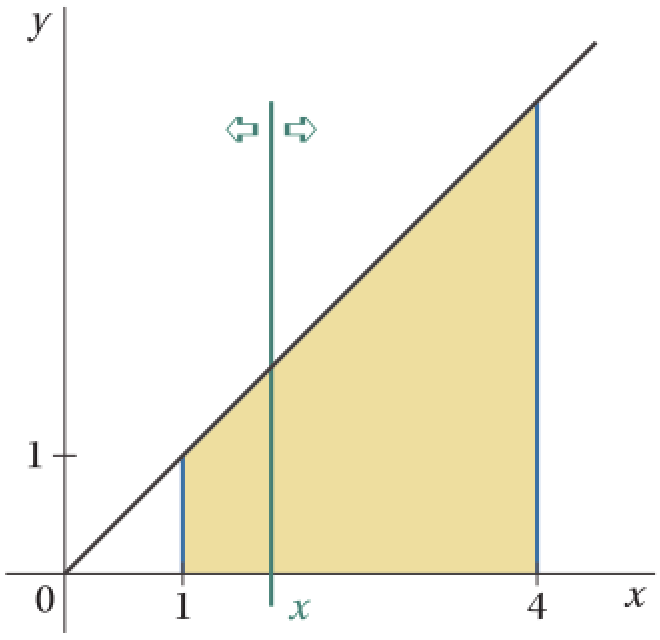
3

Gegeven is de rechte $y=f(x)$.

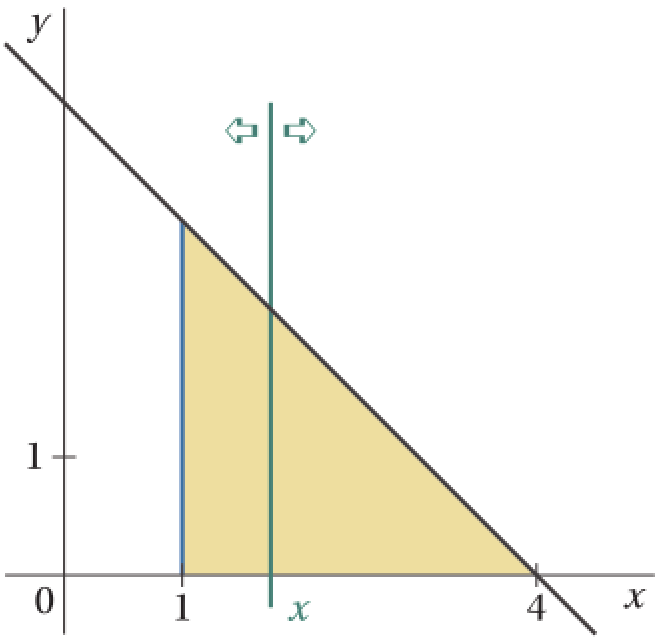
a Bepaal de oppervlaktefunctie over het interval $[1, x]$.

b Bereken hiermee de oppervlakte van het gekleurde gebied.

1 $y=x$



2 $y=-x+4$



a ....

a ....

b ....

b ....

4

Gegeven is de rechte $y = f(x)$.

a Teken de rechte.

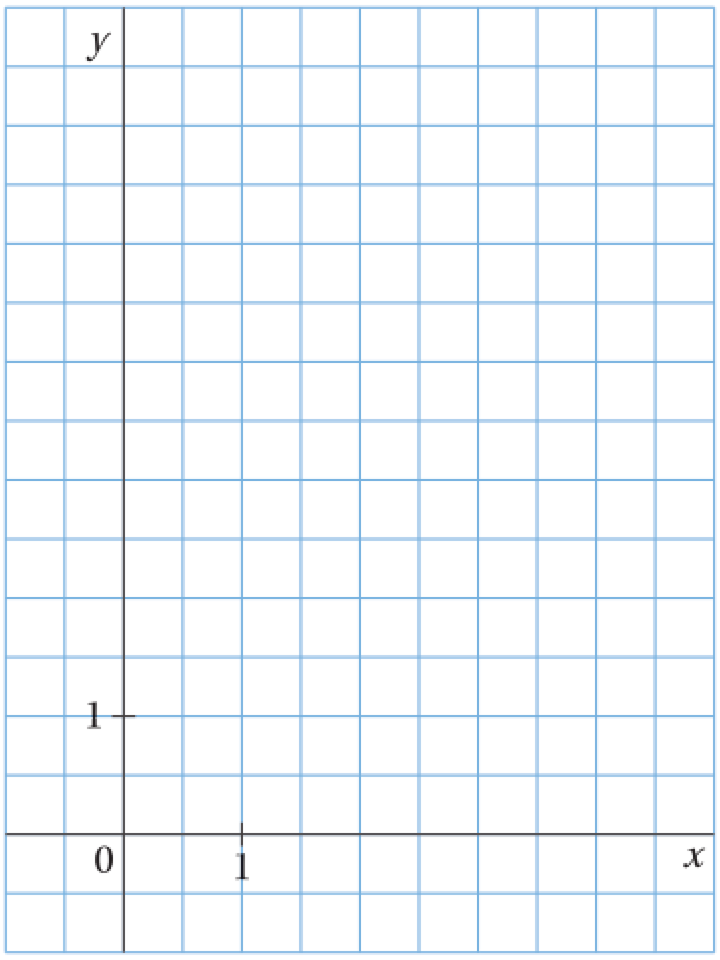
b Kleur het gebied tussen de rechte en de x-as over het interval $[0, 4]$.

c Bepaal de oppervlaktefunctie over het interval $[0, x]$.

d Bereken hiermee de oppervlakte van het gekleurde gebied.

1 $y = 1{,}5x + 0{,}5$

a en **b**



c ....

....

....

....

....

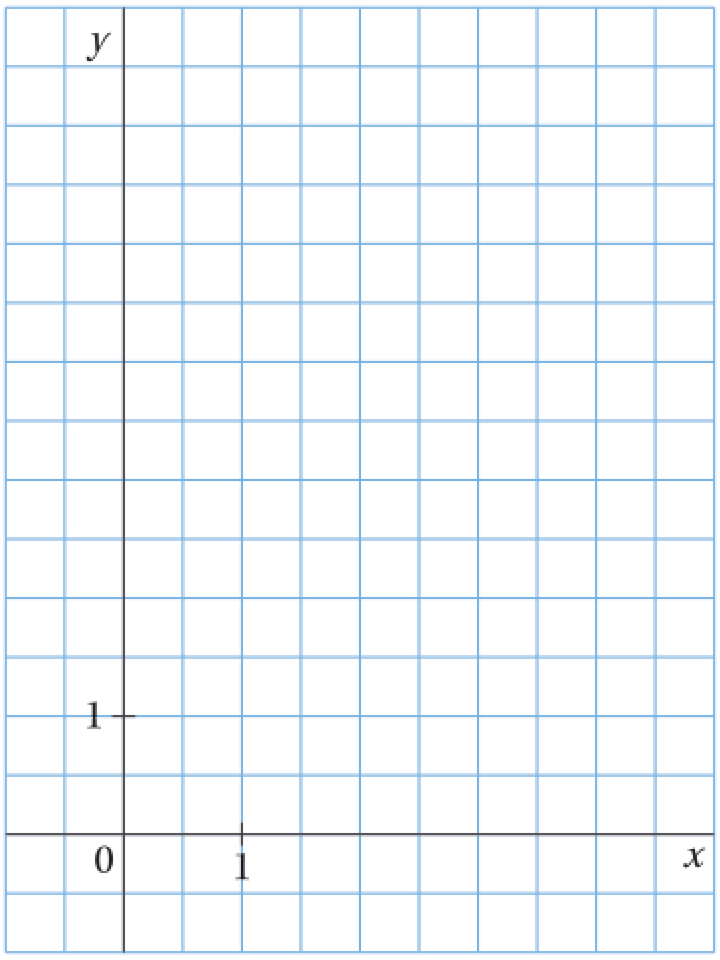
....

d ....

....

2 $y = -0{,}25x + 3$

a en **b**



c ....

....

....

....

....

....

d ....

....

5

Gegeven is de rechte $y = f(x)$.

a Teken de rechte.

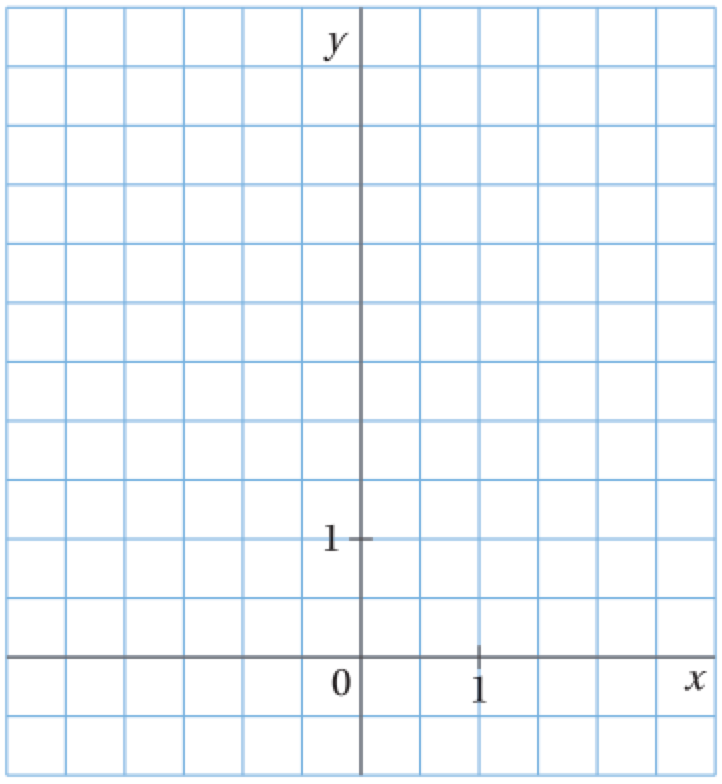
b Kleur het gebied tussen de rechte en de x-as over het interval $[-1, 2]$.

c Bepaal de oppervlaktefunctie over het interval $[-1, x]$.

d Bereken hiermee de oppervlakte van het gekleurde gebied.

1 $y = -x + 2$

a en **b**



c ....

....

....

....

....

....

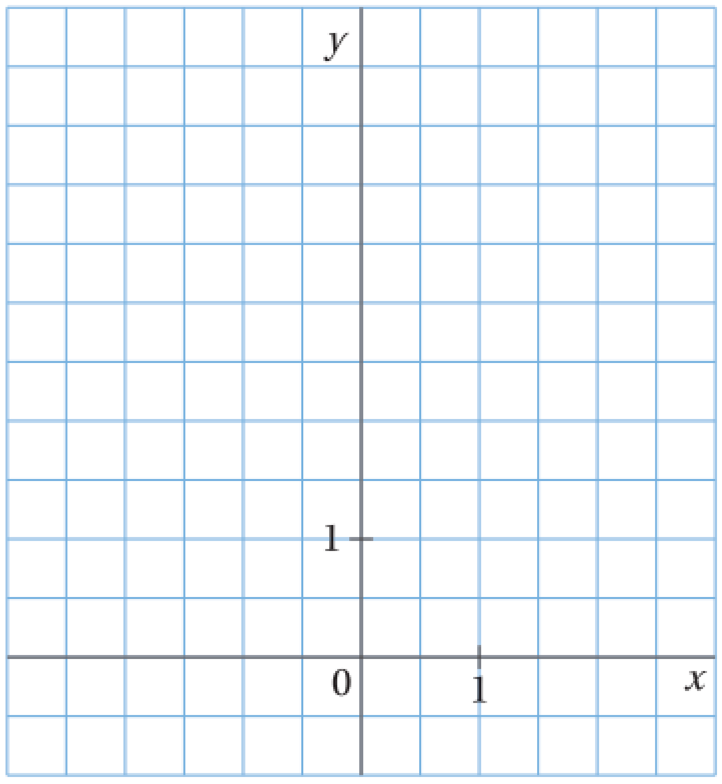
....

d ....

....

2 $y = 0{,}5x + 3$

a en **b**



c ....

....

....

....

....

....

....

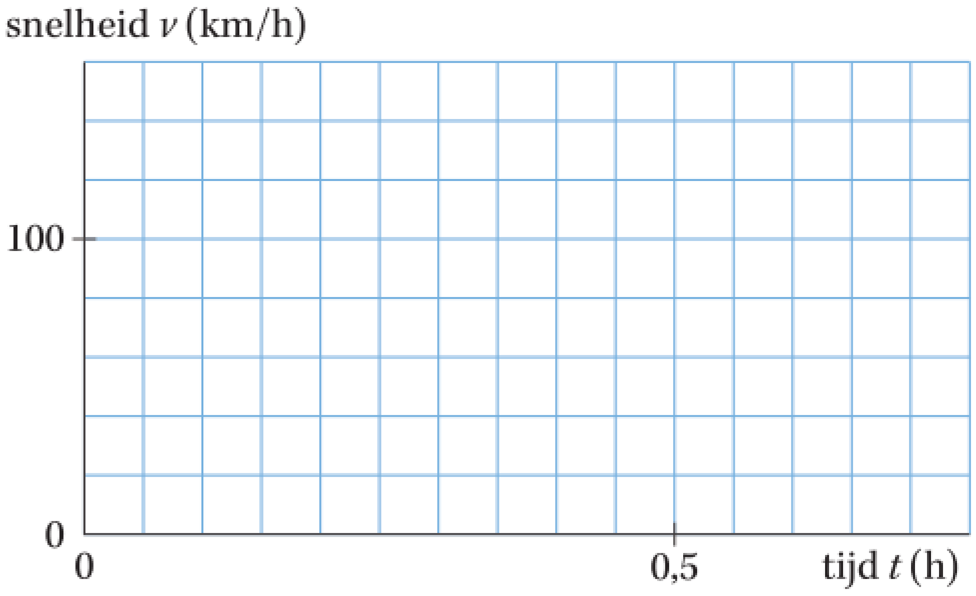
d ....

....

6

Een auto rijdt een half uur met een constante snelheid van 120 km/h.

1 Teken de grafiek van de snelheidsfunctie $v(t)$.





2 Wat is het voorschrift van de snelheidsfunctie?

....

3 Bepaal de oppervlaktefunctie over het interval $[0, t]$.

....

....

4 Welke grootheid beschrijft de oppervlaktefunctie? Verklaar.

....

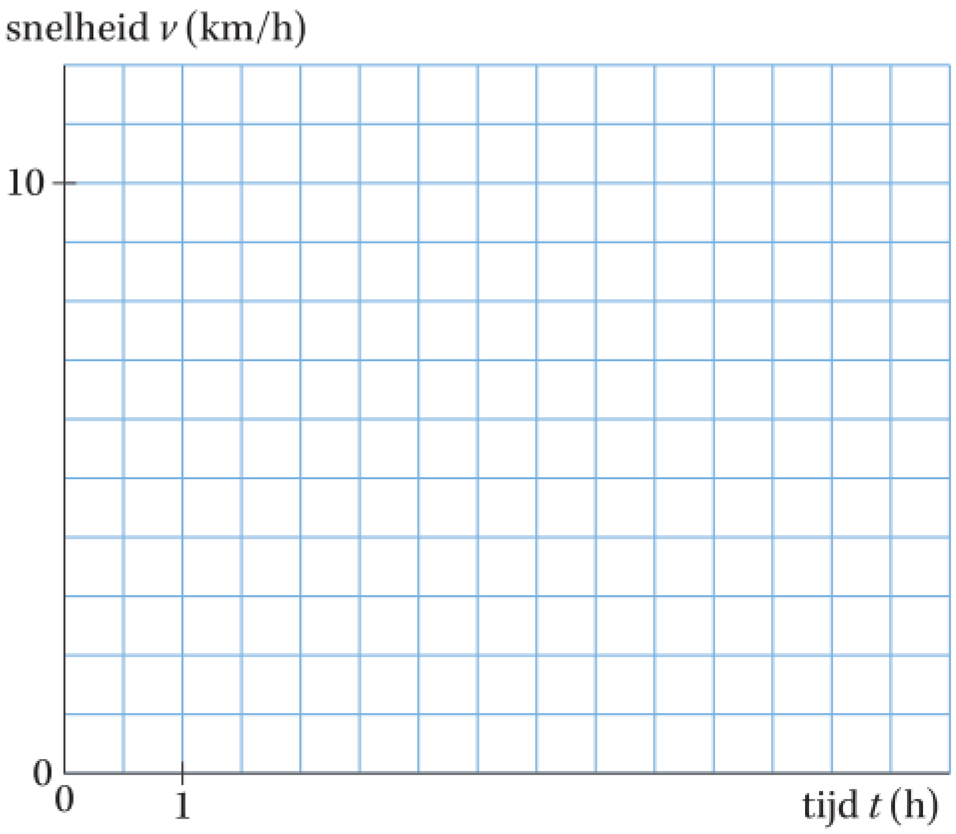
5 Bereken met de oppervlaktefunctie de afstand die de wagen aflegt in een half uur.

....

7

Een auto vertrekt en gedurende 5 seconden neemt de snelheid gelijkmatig toe tot 10 m/s.

1 Teken de grafiek van de snelheidsfunctie $v(t)$.





2 Wat is het voorschrift van de snelheidsfunctie?

....

3 Bepaal het voorschrift van de oppervlaktefunctie over het interval $[0, t]$.

....

....

4 Welke grootheid beschrijft de oppervlaktefunctie?

....

5 Bereken met de oppervlaktefunctie de afstand afgelegd in de eerste 5 seconden.

....

Afgeleiden van oppervlaktefuncties

8 **Instap**

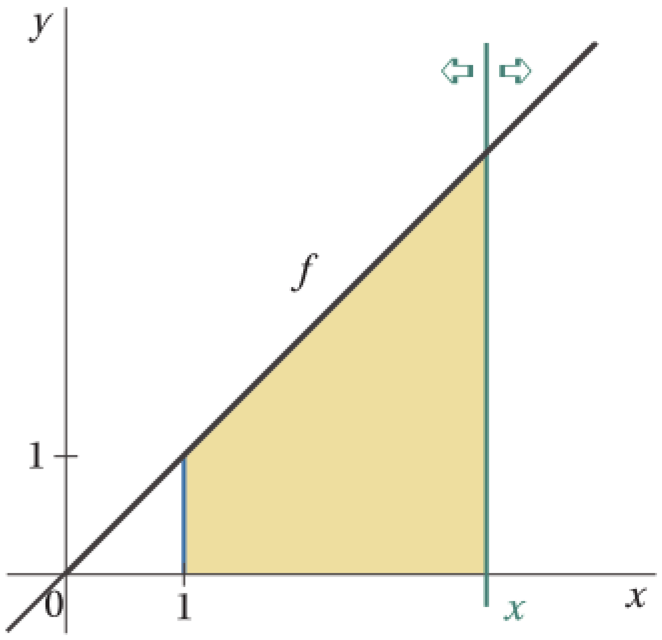
Gegeven zijn de functies f en g met hun bijbehorende oppervlaktefuncties over het interval $[1, x]$.

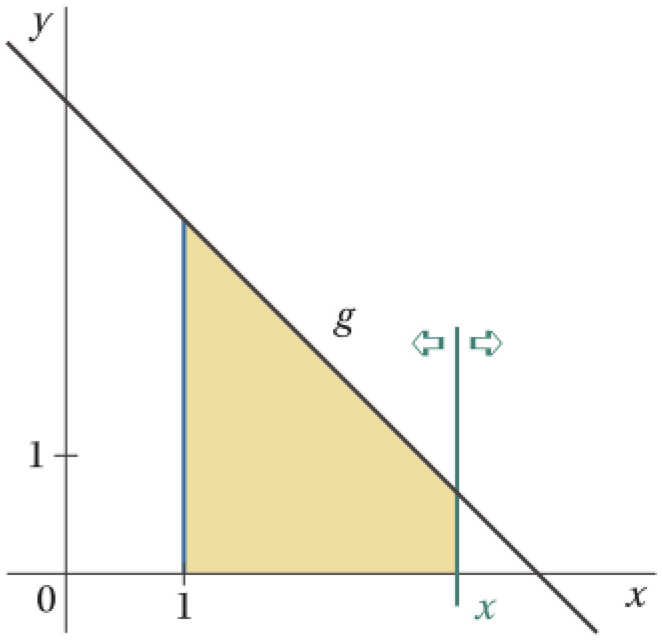
$f(x) = x$

$A(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5$ zie opdracht 3.1

$g(x) = -x + 4$

$A(x) = -0{,}5x^2 + 4x - 3{,}5$ zie opdracht 3.2





1 Bereken de afgeleide functies A'.

$A'(x) =$ ....

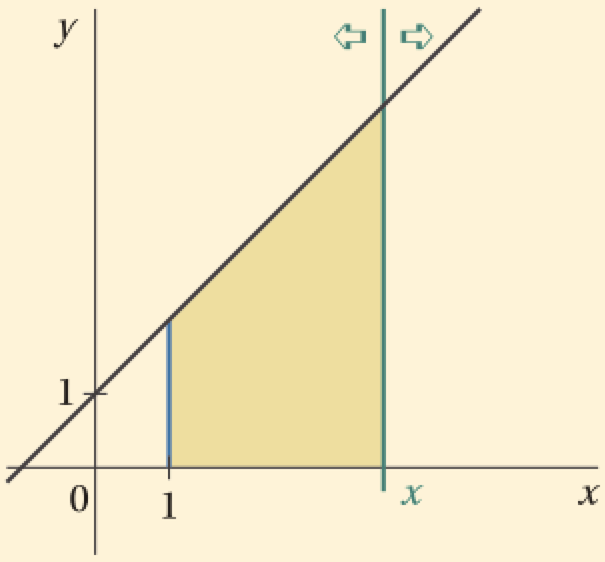
$A'(x) =$ ....

2 Teken in het groen de grafieken van de afgeleide functies A'. Wat stellen we vast?

....

Afgeleiden van oppervlaktefuncties

De rechte $y = x + 1$ ligt boven de x-as in het interval $[1, x]$.
De oppervlaktefunctie $A(x) = 0{,}5x^2 + x - 1{,}5$ beschrijft de oppervlakte van het gebied tussen de rechte en de x-as over het interval $[1, x]$.



zie pagina 9

We berekenen de afgeleide functie A' van de oppervlaktefunctie $A(x) = 0{,}5x^2 + x - 1{,}5$.

$$\begin{aligned} A'(x) &= D(0{,}5x^2 + x - 1{,}5) = 0{,}5 \cdot D(x^2) + D(x) - D(1{,}5) \\ &= 0{,}5 \cdot 2x + 1 - 0 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

We stellen vast:

De afgeleide functie van de oppervlaktefunctie A is gelijk aan de gegeven functie f.

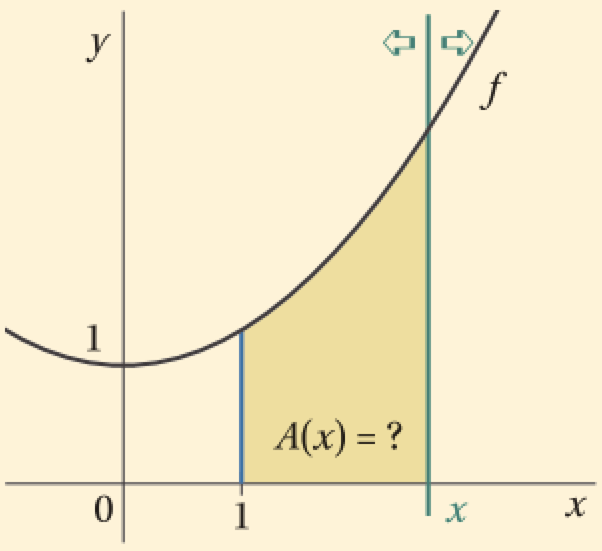
We schrijven: **$DA(x) = f(x)$**

Deze vaststelling geldt voor elke veeltermfunctie waarvan de grafiek boven de x-as ligt in het interval waarover de oppervlakteberekening gebeurt.

Voor het bewijs van deze eigenschap verwijzen we naar uitdaging 7.

Probleemstelling

We beschouwen het gebied tussen de grafiek van de tweedegraadsfunctie $f(x) = 0{,}3x^2 + 1$ en de x-as over het interval $[1, x]$.



Het voorschrift van de oppervlaktefunctie A kunnen we niet opstellen met behulp van gekende oppervlakteformules. We weten wel dat de afgeleide functie van de oppervlaktefunctie A gelijk is aan de functie f.

$$DA(x) = f(x)$$

$$DA(x) = 0{,}3x^2 + 1$$

$$A(x) = ?$$

Om het voorschrift van de oppervlaktefunctie A te berekenen, is het nodig dat we de bewerking 'afleiden van functies' kunnen omkeren. Dit is het onderwerp van de volgende paragraaf.

9

Gegeven is de oppervlaktefunctie A van een functie f over het interval $[0, x]$.

Bereken het functievoorschrift van f.

1 $A(x) = 4x$ $f(x) =$ ....

....

....

2 $A(x) = 0{,}3x^2$ $f(x) =$ ....

3 $A(x) = 0{,}5x^2 + 2x$ $f(x) =$ ....

4 $A(x) = 0{,}25x^2 + 3x$ $f(x) =$ ....

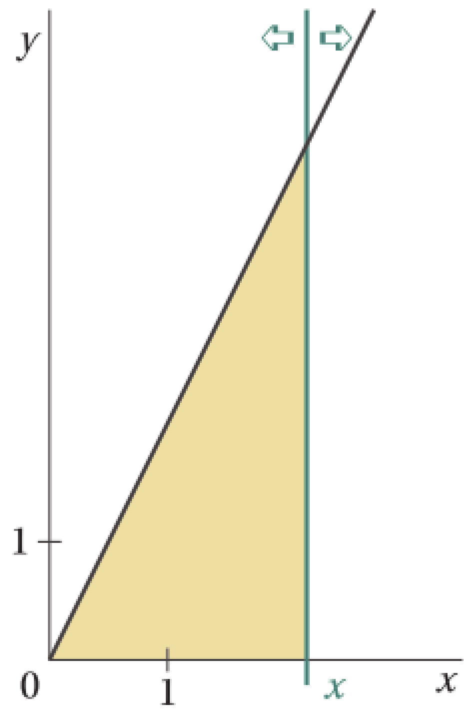
5 $A(x) = 0{,}1x^3 + x$ $f(x) =$ ....

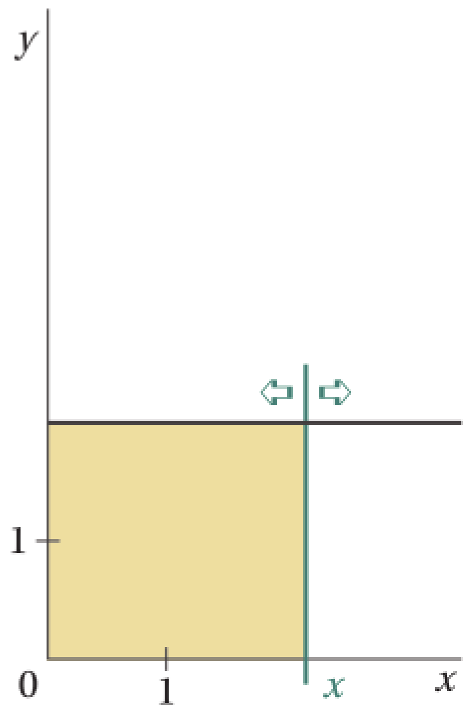
6 $A(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ $f(x) =$ ....

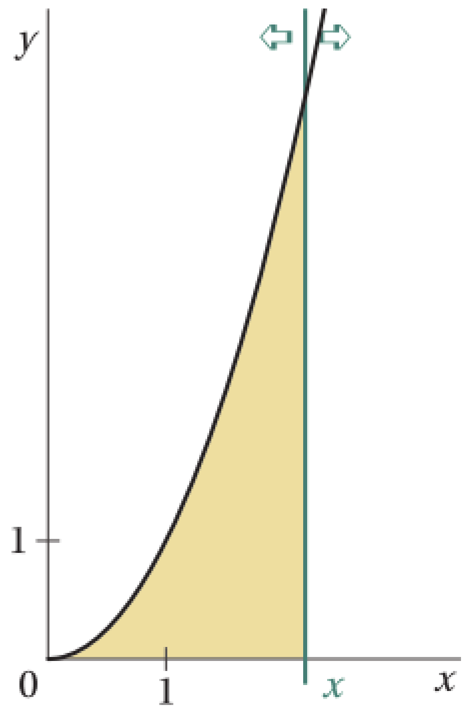
10

Verbind elke grafiek met de bijbehorende oppervlaktefunctie.

1

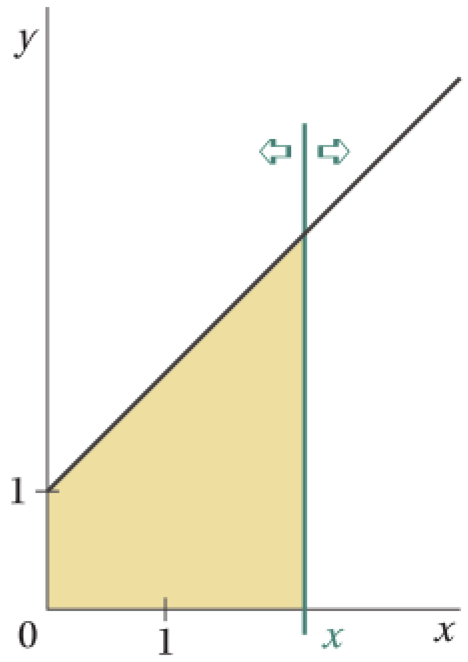


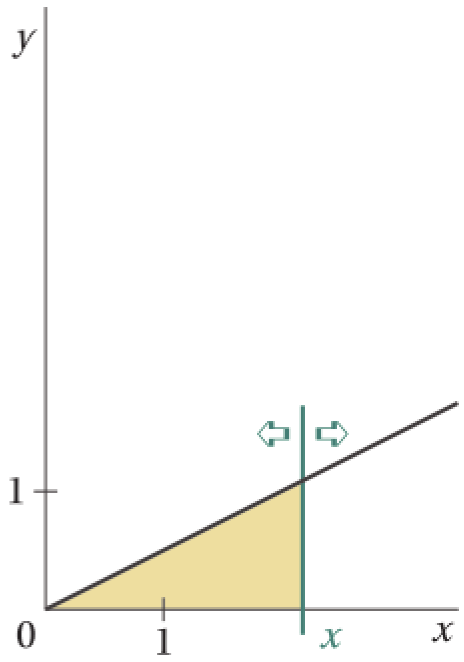


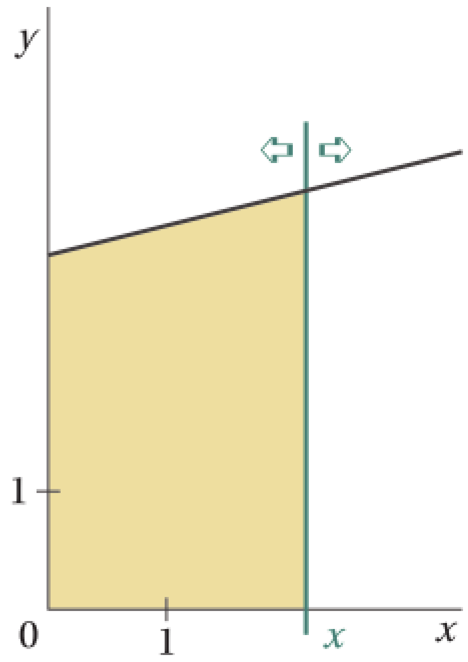


$A(x) = 2x$ $A(x) = x^2$ $A(x) = \frac{1}{3}x^3$

2



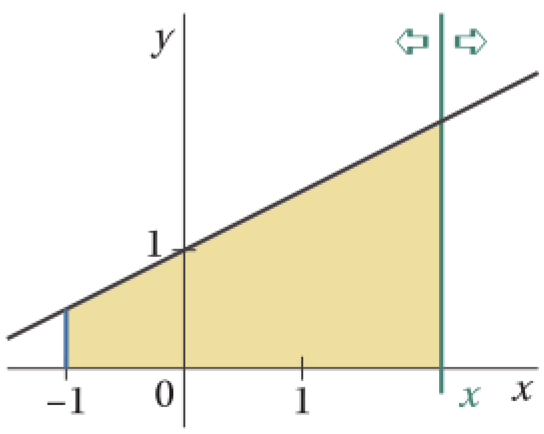


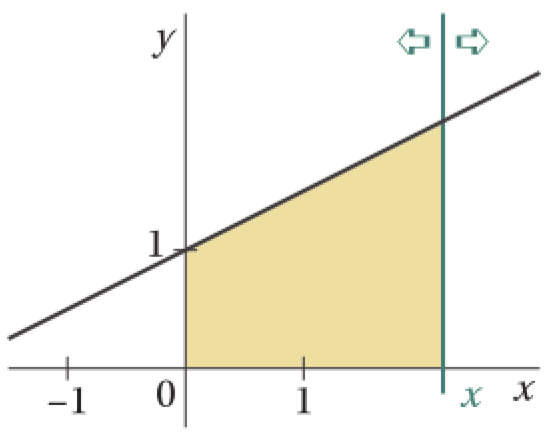


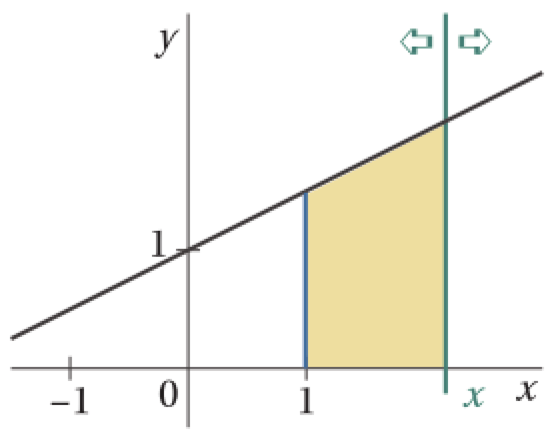
$A(x) = 0{,}5x^2 + x$ $\qquad$ $A(x) = 0{,}125x^2 + 3x$ $\qquad$ $A(x) = 0{,}25x^2$

11

Gegeven zijn drie oppervlaktefuncties van een functie *f*.







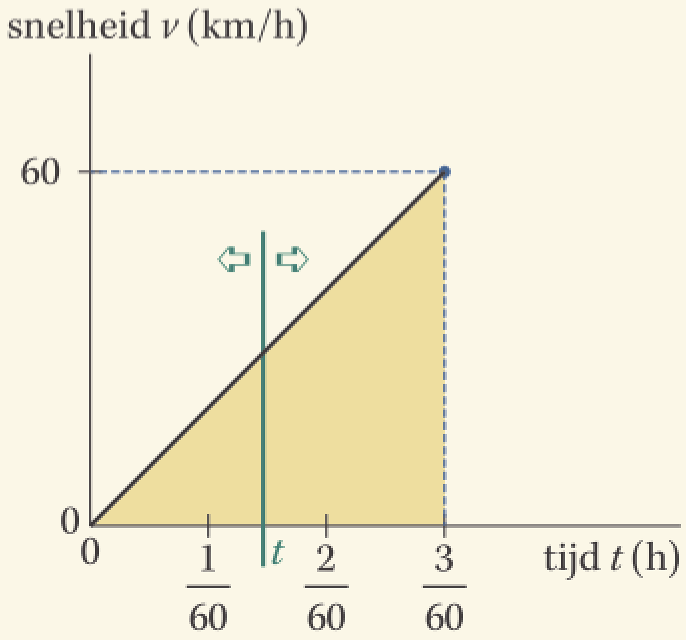
$A_1(x) = 0{,}25x^2 + x$ $\qquad$ $A_2(x) = 0{,}25x^2 + x - 1{,}25$ $\qquad$ $A_3(x) = 0{,}25x^2 + x + 0{,}75$

a Bepaal het functievoorschrift van *f*.

b Verbind elke grafiek met de bijbehorende oppervlaktefunctie.

Uitdagingen

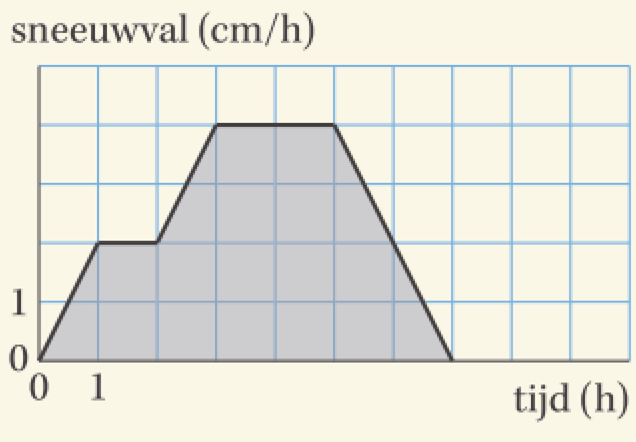
1 De snelheid van een oldtimer tijdens de eerste 3 minuten wordt weergegeven met de snelheidsgrafiek.





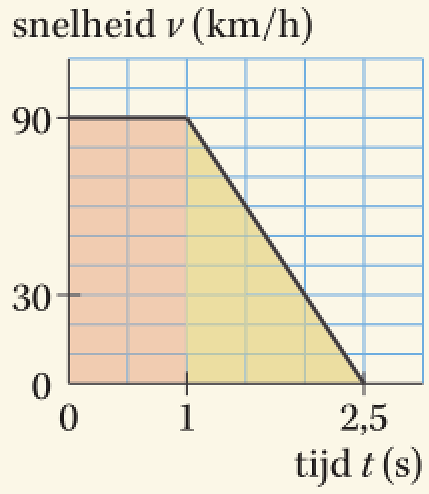
1. Hoe zien we dat de snelheid gelijkmatig toeneemt?
2. Wat is het voorschrift van de snelheidsfunctie $v(t)$?
3. Bepaal de oppervlaktefunctie over het interval $[0, t]$.
4. Bereken met de oppervlaktefunctie de afstand die de oldtimer aflegt in de eerste 3 minuten.

2 Een sneeuwbui duurt 7 uur. De grafiek toont de sneeuwval in centimeter per uur. Hoeveel centimeter sneeuw is er gevallen?





3 Een autobestuurder rijdt met een snelheid van 90 km/h en ziet plots 50 meter voor zich een hert op de rijweg staan. Na één seconde drukt hij op de rem en anderhalve seconde later komt hij tot stilstand.
De grafiek toont de snelheid van de autobestuurder tot hij tot stilstand komt.





1. Herteken de grafiek met de snelheid in m/s.
2. Verbind de oppervlakte van elke figuur uit de getekende grafiek met de gepaste afstand.

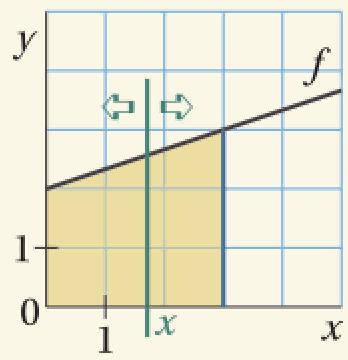
oppervlakte rechthoek	oppervlakte driehoek	oppervlakte trapezium
•	•	•
•	•	•
afgelegde weg tot stilstand	afgelegde weg tijdens remmen	afgelegde weg tijdens reactietijd

3. Heeft de autobestuurder een aanrijding kunnen vermijden?

4 Gegeven zijn de functies $f(x) = 1{,}5x$ en $g(x) = 0{,}5x$.

1. Teken de grafieken van f en g.
2. Bepaal de oppervlaktefunctie van het gebied tussen de grafieken van f en g over het interval $[0, x]$.
3. Bereken met de oppervlaktefunctie de oppervlakte van het gebied tussen de rechten over het interval $[0\,;2{,}5]$.

5 De grafiek van de functie $f(x) = ax + b$ is een stijgende rechte die de y-as snijdt boven de oorsprong.



1. Bepaal de oppervlaktefunctie over het interval $[0, x]$.
2. Toon aan dat $DA(x) = f(x)$.
3. Bepaal een vergelijking van de getekende rechte.
4. Bereken met de oppervlaktefunctie de oppervlakte van het gekleurde gebied.

6 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x + 1$ en $g(x) = 0{,}5x$.

1 Teken de grafieken van f en g.

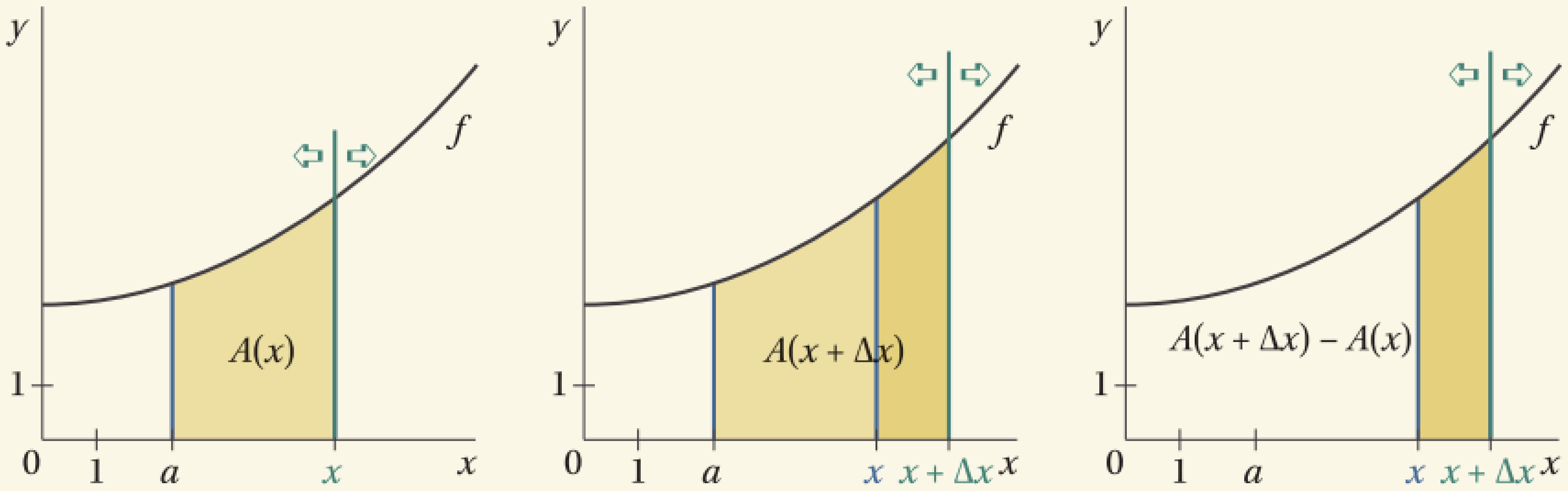
2 Kleur het gebied tussen de rechten over het interval $[0; 2{,}5]$.

3 Bepaal de oppervlaktefunctie van het gebied tussen de grafieken van f en g over het interval $[0, x]$.

4 Toon aan dat $DA(x) = f(x) - g(x)$.

5 Bereken met de oppervlaktefunctie de oppervlakte van het gekleurde gebied.

7 De oppervlaktefunctie A beschrijft de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van de veeltermfunctie f en de x-as over het interval $[a, x]$.



Als we het grenspunt x van het interval $[a, x]$ over een afstand Δx naar rechts verschuiven, dan groeit de oppervlakte $A(x)$ van het gebied aan tot een oppervlakte $A(x + \Delta x)$.

1 De toename $A(x + \Delta x) - A(x)$ van de oppervlakte van het gebied kunnen we benaderen met de oppervlakte van een rechthoek voor Δx voldoende klein. Wat is de oppervlakte van deze rechthoek?

2 Toon aan dat $A'(x) = f(x)$.
Gebruik de formule voor afgeleide functie: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

1.2 Onbepaalde integralen

Het omgekeerde van afleiden

1 Instap

1 Verbind elke functie met de bijbehorende afgeleide functie.

$f(x) = x^3$ •	• $f'(x) = x^2$
$f(x) = x^3 + 5$ •	• $f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^3 - 7$ •	• $f'(x) = 3x^2 + 5$
$f(x) = x^5$ •	• $f'(x) = 5x^4 - 10$
$f(x) = x^5 + 3$ •	• $f'(x) = 5x^4$
$f(x) = x^5 - 10$ •	• $f'(x) = x^4$

2 Elke functie heeft juist één afgeleide functie. Omgekeerd is elke functie de afgeleide van meerdere functies. Hoe kunnen we dit verklaren?

....

3 Bepaal twee functies *g* en *h* die de functie *f* als afgeleide hebben.

$f(x) = 4x^3$	$f(x) = 9x^8$	$f(x) = 12x^{11}$
$g(x) =$	$g(x) =$	$g(x) =$ ....
$h(x) =$	$h(x) =$	$h(x) =$ ....

Onbepaalde integralen van machtsfuncties $f(x) = x^n$

Met de rekenregel voor het afleiden van machtsfuncties berekenen we:

$D(x^5) = 5x^4$ $\quad$ $D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$

De functie $F(x) = x^5$ noemen we een **primitieve functie** van $f(x) = 5x^4$.

Een primitieve functie stellen we meestal voor met een hoofdletter.

We schrijven: $\mathbf{D\,F(x) = f(x) \Leftrightarrow}$ **F is een primitieve functie van f**

Voorbeelden

$F(x)=x^3$ is een primitieve functie van $f(x)=3x^2$. — $D(x^3)=3x^2$

$F(x)=4x$ is een primitieve functie van $f(x)=4$. — $D(4x)=4$

Primitieve functies van machtsfuncties $f(x)=x^n$

Voorschriften van primitieve functies van $f(x)=x^n$ met n een natuurlijk getal kunnen we aflezen in de tabel.

functies $f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^4	...	x^n
primitieve functies $F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$	$\frac{1}{5}x^5$	...	$\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$

Om aan te tonen dat $F(x)=\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$ een primitieve functie is van $f(x)=x^n$ berekenen we de afgeleide van de functie F.

$$\begin{aligned} DF(x) &= D\left(\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot D(x^{n+1}) && \text{veelvoudregel afgeleiden} \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\cdot x^n && \text{afgeleide van machtsfunctie} \\ &= x^n \\ &= f(x) && f(x)=x^n \end{aligned}$$

Primitieve functies en onbepaalde integraal

Omdat de afgeleide van een constante functie de nulfunctie is, heeft de functie $f(x)=x^2$ 'onbepaald' veel primitieve functies die enkel in de constante term van elkaar verschillen.

Primitieve functies van $f(x)=x^2$ zijn:

$F(x)=\frac{1}{3}x^3$ — $D\left(\frac{1}{3}x^3\right)=\frac{1}{3}\cdot D(x^3)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$

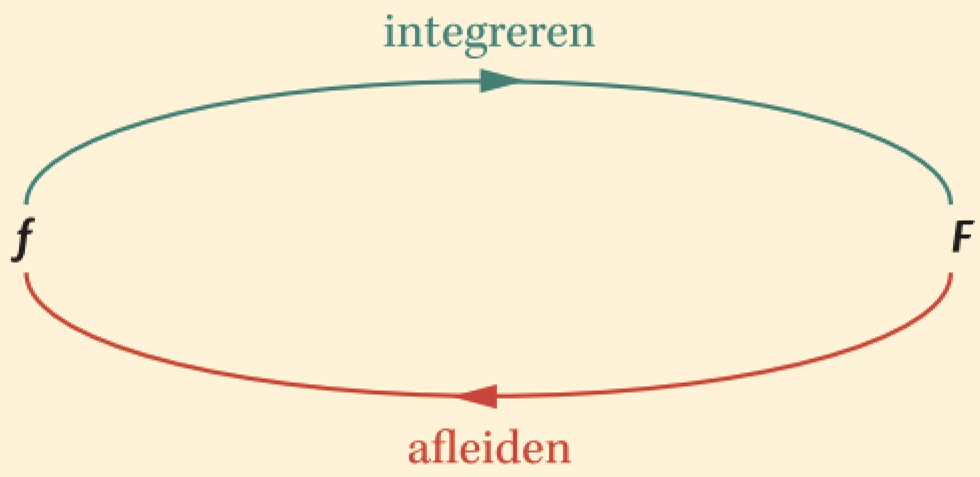
$F(x)=\frac{1}{3}x^3+3$ — $D\left(\frac{1}{3}x^3+3\right)=D\left(\frac{1}{3}x^3\right)+D(3)=x^2+0=x^2$

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-20$ — $D\left(\frac{1}{3}x^3-20\right)=D\left(\frac{1}{3}x^3\right)-D(20)=x^2-0=x^2$

...

Alle primitieve functies van $f(x)=x^2$ kunnen we schrijven als $F(x)=\frac{1}{3}x^3+c$ met c een willekeurig reëel getal.

Het bepalen van primitieve functies is de omgekeerde bewerking van het afleiden van functies. Deze omgekeerde bewerking noemen we **integreren**.



De verzameling van alle primitieve functies F van een functie f noemen we de onbepaalde integraal van f.

We schrijven: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

We lezen: de (onbepaalde) integraal van f is een primitieve functie F van f plus een constante.

Het symbool '$\int$', een langgerekte S, verwijst naar 'som'. De notatie 'dx' stelt een kleine toename van de variabele x voor. Het gebruik van beide notaties wordt verklaard in het volgende hoofdstuk.

De constante term c noemen we de **integratieconstante**.

Rekenregel voor onbepaalde integraal van machtsfuncties $f(x) = x^n$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$ is primitieve functie van $f(x) = x^n$

Voorbeelden

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\int x^7\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}x^8 + c$$

$$\int x^{19}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}x^{20} + c$$

2

Bepaal een primitieve functie F van f.

1 $f(x) = 1$ $\quad F(x) =$ ....

2 $f(x) = -1$ $\quad F(x) =$ ....

3 $f(x) = 2x$ $\quad F(x) =$ ....

4 $f(x) = 6x^5$ $\quad F(x) =$ ....

5 $f(x) = 15x^{14}$ $\quad F(x) =$ ....

6 $f(x) = 3$ $\quad F(x) =$ ....

3

Bepaal alle primitieve functies F van f.

1 $f(x) = 2$ $F(x) =$ ....

2 $f(x) = 5$ $F(x) =$ ....

3 $f(x) = 3x^2$ $F(x) =$ ....

4 $f(x) = 7x^6$ $F(x) =$ ....

5 $f(x) = 10x^9$ $F(x) =$ ....

6 $f(x) = -4$ $F(x) =$ ....

4

Vul de tabel in met primitieve functies F van de functie f.

	f	één F	alle F	de F met $F(2) = 0$
1	$f(x) = 2x$	$F(x) =$	$F(x) =$	.... $F(x) =$ ....
2	$f(x) = -5$	$F(x) =$	$F(x) =$	.... $F(x) =$ ....
3	$f(x) = 6x^5$	$F(x) =$	$F(x) =$	.... $F(x) =$ ....
4	$f(x) = -3x^2$	$F(x) =$	$F(x) =$	.... $F(x) =$ ....

5

Bereken.

1 $\int x \, dx =$ ....

2 $\int x^5 \, dx =$ ....

3 $\int x^3 \, dx =$ ....

4 $\int x^4 \, dx =$ ....

5 $\int x^{17} \, dx =$ ....

6 $\int x^{22} \, dx =$ ....

6

Bereken $\int \mathrm{d}x$ met de rekenregel voor de onbepaalde integraal van machtsfuncties.

7

Bepaal een machtsfunctie f waarvan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn t in een willekeurig punt $P(x, f(x))$ van de grafiek gelijk is aan x.



Onbepaalde integralen van veeltermfuncties

8 Instap

Verbind elke functie met een bijbehorende primitieve functie.

1

$f(x) = 5x^2$	$f(x) = 5x$	$f(x) = 5$
•	•	•
•	•	•
$F(x) = 5x$	$F(x) = \frac{5}{2}x^2$	$F(x) = \frac{5}{3}x^3$

2

$f(x) = x^2 + x$	$f(x) = x^4 + x^3$	$f(x) = x^5 + x^4$
•	•	•
•	•	•
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$	$F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5$	$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4$

3

$f(x) = 2x^3 + 3x$	$f(x) = x^3 + 3x$	$f(x) = 2x^3 + 3$
•	•	•
•	•	•
$F(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2$	$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2$

Onbepaalde integralen van veeltermfuncties

Machtsfuncties $f(x) = ax^n$ kunnen we integreren met de veelvoudregel.

Veelvoudregel

Bij het integreren van een product mogen we een constante factor vooropzetten.

$$\int r \cdot f(x)\,dx = r \cdot \int f(x)\,dx \qquad r \in \mathbb{R}$$

De machtsfunctie $g(x) = 3x^4$ kunnen we beschouwen als het drievoud van de functie $f(x) = x^4$. Met de veelvoudregel berekenen we de integraal van de functie $g(x) = 3x^4$.

$$\begin{aligned}
\int 3x^4\,dx &= 3 \cdot \int x^4\,dx && \text{veelvoudregel integralen}\\
&= 3 \cdot \left(\frac{1}{5}x^5 + c'\right) && \text{integraal van een machtsfunctie}\\
&= \frac{3}{5}x^5 + 3c' &&\\
&= \frac{3}{5}x^5 + c && \text{stel } 3c' = c
\end{aligned}$$

Voorbeelden

$$\int 16x\,dx = 16 \cdot \int x\,dx = 16 \cdot \frac{1}{2}x^2 + c = 8x^2 + c$$

$$\int 4x^2\,dx = 4 \cdot \int x^2\,dx = 4 \cdot \frac{1}{3}x^3 + c = \frac{4}{3}x^3 + c$$

$$\int 14x^6\,dx = 14 \cdot \int x^6\,dx = 14 \cdot \frac{1}{7}x^7 + c = 2x^7 + c$$

Veeltermfuncties kunnen we integreren met de somregel.

Somregel

De integraal van een som is de som van de integralen.

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

De veeltermfunctie $h(x) = 2x^5 + 3x^4$ kunnen we beschouwen als de som van de machtsfuncties $f(x) = 2x^5$ en $g(x) = 3x^4$. Met de somregel berekenen we de integraal van de functie $h(x) = 2x^5 + 3x^4$.

$$\begin{aligned}
\int (2x^5 + 3x^4)\,dx &= \int 2x^5\,dx + \int 3x^4\,dx && \text{somregel integralen}\\
&= 2 \cdot \int x^5\,dx + 3 \cdot \int x^4\,dx && \text{veelvoudregel integralen}\\
&= 2 \cdot \frac{1}{6}x^6 + c' + 3 \cdot \frac{1}{5}x^5 + c'' && \text{integraal van een machtsfunctie}\\
&= \frac{1}{3}x^6 + \frac{3}{5}x^5 + c && \text{stel } c' + c'' = c
\end{aligned}$$

Voorbeelden

$$\int(5x+1)\,\mathrm{d}x=\int 5x\,\mathrm{d}x+\int 1\,\mathrm{d}x=5\cdot\int x\,\mathrm{d}x+\int 1\,\mathrm{d}x=5\cdot\frac{1}{2}x^2+x+c=\frac{5}{2}x^2+x+c$$

$$\int(x^2-3x)\,\mathrm{d}x=\int x^2\,\mathrm{d}x-\int 3x\,\mathrm{d}x=\int x^2\,\mathrm{d}x-3\cdot\int x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-3\cdot\frac{1}{2}x^2+c=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+c$$

$$\int(4x^2+2x)\,\mathrm{d}x=\int 4x^2\,\mathrm{d}x+\int 2x\,\mathrm{d}x=4\cdot\int x^2\,\mathrm{d}x+2\cdot\int x\,\mathrm{d}x=4\cdot\frac{1}{3}x^3+2\cdot\frac{1}{2}x^2+c=\frac{4}{3}x^3+x^2+c$$

Merk op

Als we een willekeurige constante vermeerderen met een getal of vermenigvuldigen met een van nul verschillend getal, blijft het een willekeurige constante. Bijgevolg mogen we bij het berekenen van een onbepaalde integraal alle integratieconstanten samenvoegen tot één constante *c*.

9

Bereken met de veelvoudregel.

1. $\int 20x\,\mathrm{d}x=$ ....

2. $\int(-41x)\,\mathrm{d}x=$ ....

3. $\int 6x^2\,\mathrm{d}x=$ ....

4. $\int 3x^3\,\mathrm{d}x=$ ....

5. $\int(-x^2)\,\mathrm{d}x=$ ....

6. $\int(-x^4)\,\mathrm{d}x=$ ....

7. $\int \frac{3}{2}x^2\,\mathrm{d}x=$ ....

8. $\int \frac{2}{3}x^3\,\mathrm{d}x=$ ....

9. $\int \frac{7}{3}x^6\,\mathrm{d}x=$ ....

10. $\int \frac{6}{5}x^9\,\mathrm{d}x=$ ....

10

Bereken.

1 $\int(x+1)\mathrm{d}x=$ ......

2 $\int(x^3-x^2+x)\mathrm{d}x=$ ......

3 $\int(x^3+x^2+x+1)\mathrm{d}x=$ ......

4 $\int(x^4+x-1)\mathrm{d}x=$ ......

5 $\int(4x+3)\mathrm{d}x=$ ......

6 $\int(6x^2-5)\mathrm{d}x=$ ......

7 $\int(3x^2-4x)\mathrm{d}x=$ ......

8 $\int(2x^2-x+1)\mathrm{d}x=$ ......

9 $\int(4x^3-2x^2+1)\mathrm{d}x=$ ......

10 $\int(x^5+2x^3-5)\mathrm{d}x=$ ......

11

Bereken de functie f.

1 $f'(x) = 6x$

$f(x) =$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

2 $f'(x) = 7x^2$

$f(x) =$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

3 $f'(x) = x - 3$

$f(x) =$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

4 $f'(x) = -x - 2$

$f(x) =$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

5 $f'(x) = x^3 - 5$

$f(x) =$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

6 $f'(x) = 9x^2 + 6x$

$f(x) =$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

12

Bepaal de veeltermfunctie f waarvan de grafiek door het gegeven punt P gaat en waarvan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn t in een willekeurig punt $(x, f(x))$ gegeven is.

1 $P(-2, -5)$ rico $t = x^2$

2 $P(-1, 1)$ rico $t = 2x^3$

13

Bepaal de parameters *a* en *b*.

1 $\int (x+2)\,\mathrm{d}x = ax^2 + bx + c$

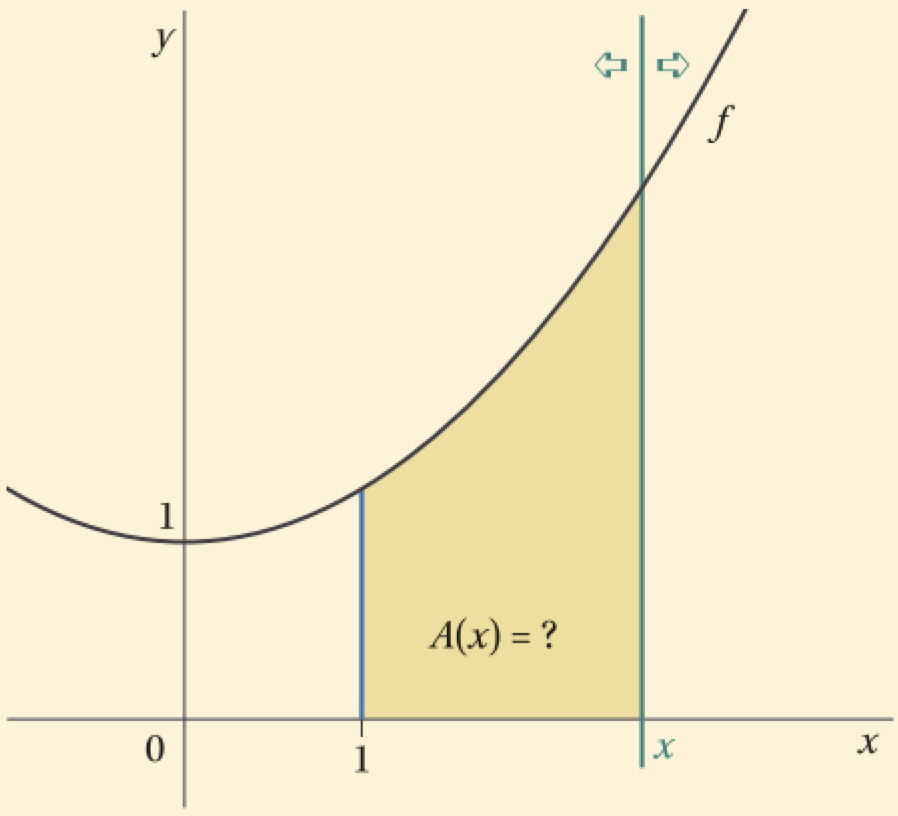
2 $\int (ax^2 + bx + 1)\,\mathrm{d}x = x^3 + x^2 + x + c$

3 $\int (4x^3 + x - 1)\,\mathrm{d}x = ax^4 + \frac{1}{2}x^2 + bx + c$

4 $\int (5x^2 + 3x + 2)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3}x^3 + \frac{3}{b}x^2 + 2x + c$

Oppervlaktefuncties en onbepaalde integraal

De oppervlaktefunctie A beschrijft de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van de tweedegraadsfunctie $f(x) = 0{,}3x^2 + 1$ en de x-as over het interval $[1, x]$. zie pagina 17



De afgeleide functie van de oppervlaktefunctie is gelijk aan de functie $f(x) = 0{,}3x^2 + 1$. Bijgevolg kunnen we $A(x)$ bepalen door f te integreren.

$$\mathrm{D}A(x) = f(x)$$

$$\mathrm{D}A(x) = 0{,}3x^2 + 1$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \int (0{,}3x^2 + 1)\mathrm{d}x \\ &= 0{,}3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + x + c \\ &= 0{,}1x^3 + x + c \end{aligned}$$

De functie A is de oppervlaktefunctie van f over het interval $[1, x]$. De functiewaarde van A in de beginwaarde 1 van dit interval is gelijk aan nul. Met dit gegeven berekenen we de integratieconstante c.

$$A(1) = 0$$

$$0{,}1 \cdot 1^3 + 1 + c = 0$$

$$0{,}1 + 1 + c = 0$$

$$c = -1{,}1$$

Bijgevolg is het voorschrift van de oppervlaktefunctie: $A(x) = 0{,}1x^3 + x - 1{,}1$

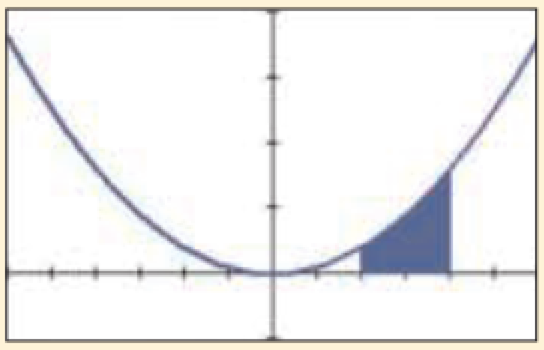
Oppervlakte van een gebied over een interval

Een veeltermfunctie f is positief in een interval $[a, b]$. De oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as over het interval $[a, b]$ kunnen we als volgt berekenen:

- we bepalen de oppervlaktefunctie A van f over het interval $[a, x]$;
- we berekenen de functiewaarde $A(b)$ en verkrijgen de gevraagde oppervlakte.

Voorbeeld

We berekenen de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van $f(x) = x^2$ en de x-as over het interval [2, 4].



Oppervlaktefunctie A van f over $[2, x]$

$$A(x) = \int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$A(2) = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot 2^3 + c = 0$$

$$\frac{8}{3} + c = 0$$

$$c = -\frac{8}{3}$$

$$A(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}$$

Oppervlakte: $A(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{8}{3} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = 18{,}66...$

14

Bereken de oppervlaktefunctie A van f over het gegeven interval.

1 $f(x) = x^2$ $\quad [0, x]$

....

....

....

....

2 $f(x) = 6x^2$ $\quad [-1, x]$

....

....

....

....

....

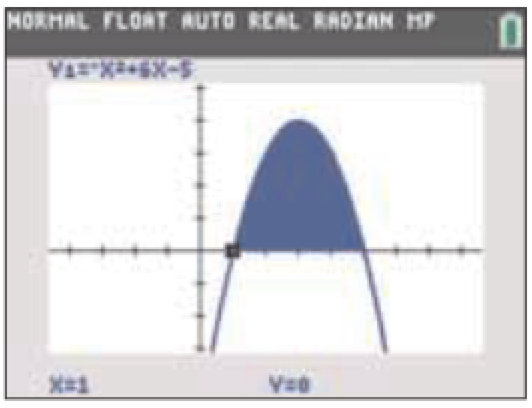
3 $f(x) = 3x^2 + 4$ $[2, x]$

4 $f(x) = 12x^2 + 16x$ $[1, x]$

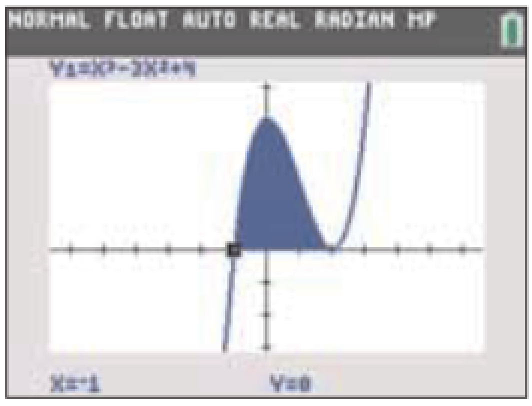
15

Bereken met de passende oppervlaktefunctie de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as.

1 $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



2 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

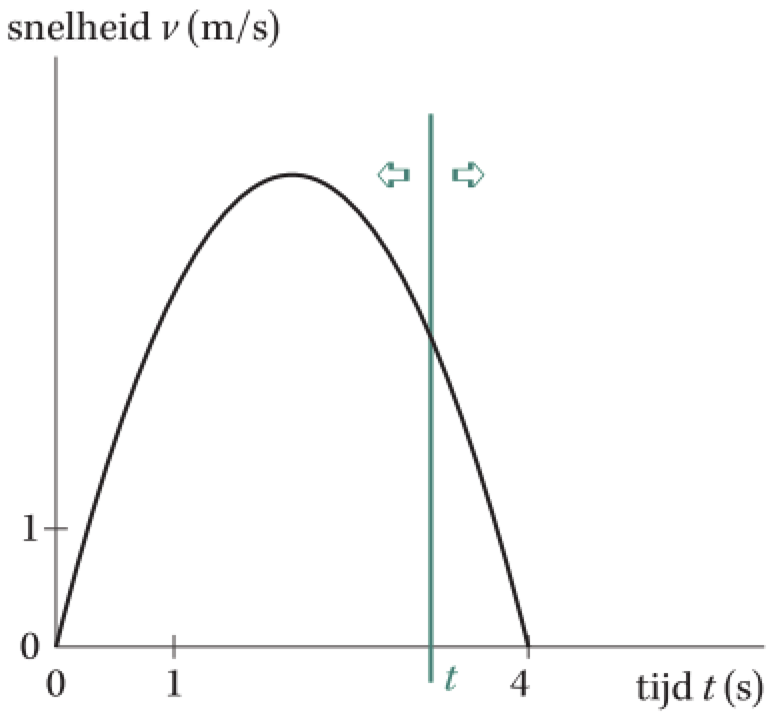


16

Gegeven is de grafiek van de snelheidsfunctie $v(t) = -t^2 + 4t$.

1 Bepaal het werkdomein van de snelheidsfunctie v.

2 Bepaal de oppervlaktefunctie over het interval $[0, t]$.



3 Bereken de afstand afgelegd in de eerste 4 seconden.

....

....

....

4 Bereken de tijd die nodig is om 9 meter af te leggen.

....

....

....

....

....

....

....

....

17

De versnelling van een vallende bol kunnen we beschrijven met de constante functie $a = 9{,}8$ met a in m/s^2.

1 Bepaal de snelheidsfunctie $v = f(t)$ en de afstandsfunctie $s = f(t)$ met t de valtijd in seconden.

....

....

....

....

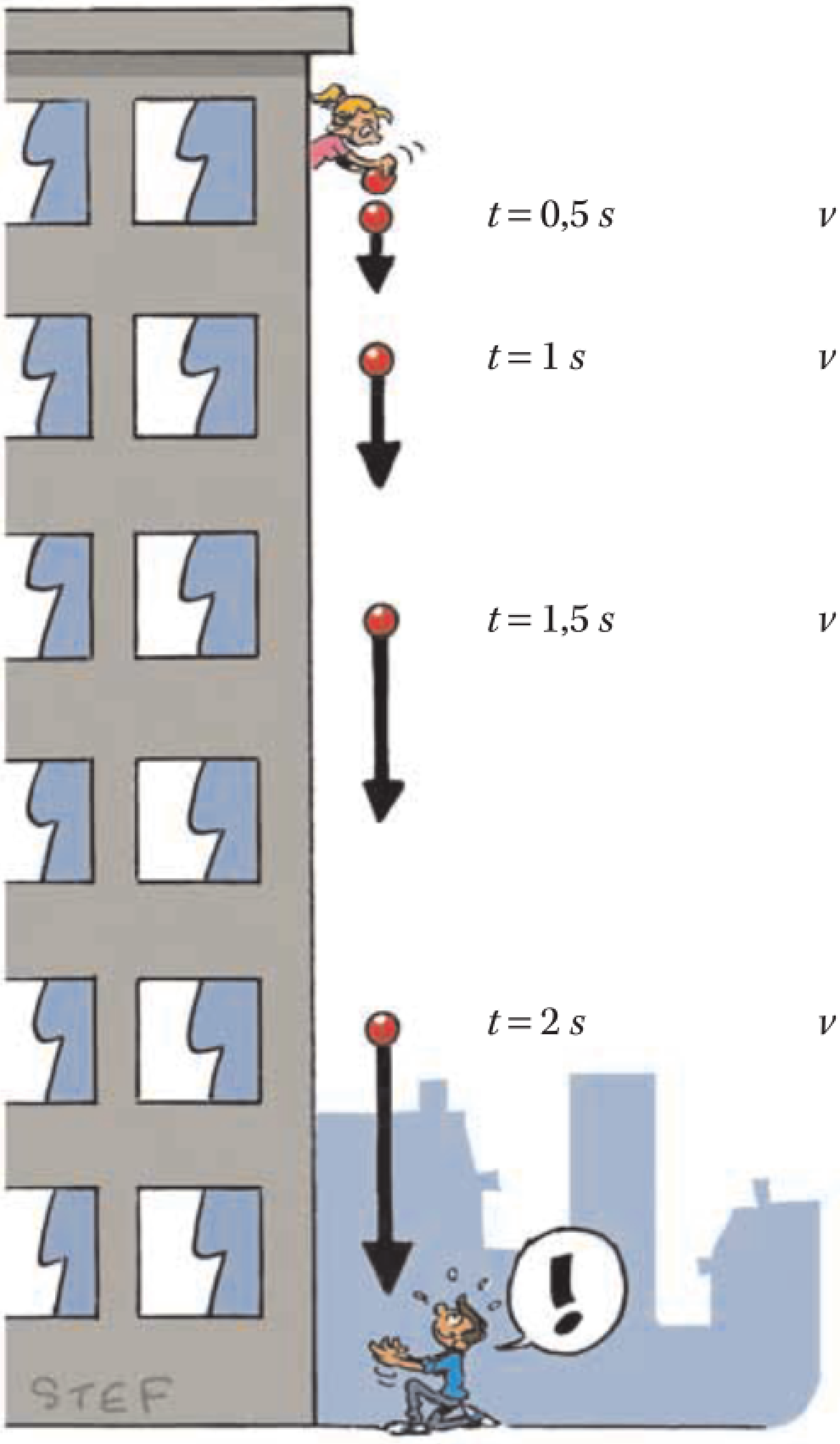
....

....

....

....

2 Vul de snelheid en de afgelegde weg in voor de gegeven valtijd. Rond af op 1 decimaal.



$t = 0{,}5\ s$ $v =$ .... m/s $s =$ .... m

$t = 1\ s$ $v =$ .... m/s $s =$ .... m

$t = 1{,}5\ s$ $v =$ .... m/s $s =$ .... m

$t = 2\ s$ $v =$ .... m/s $s =$ .... m

3 De bol valt uit een appartementsgebouw en raakt na 2,5 seconden de grond.

a Op welke hoogte werd de bol losgelaten? Rond af op 1 meter.

....

....

b Aan welke snelheid in km/h valt de bol op de grond? Rond af op 1 km/h.

....

....

....

Uitdagingen

1 Bereken een primitieve functie F van f.

1 $f(x) = 2x(x+1)$

2 $f(x) = (x-2)(x+1)$

3 $f(x) = (x-1)(x+1)$

4 $f(x) = (x-2)^2$

5 $f(x) = (2x-1)(1-x)$

6 $f(x) = (x+1)\,(x-2)\,(x+2)$

2 De functies F en G zijn primitieve functies van een veeltermfunctie f.
Omcirkel de juiste uitspraak.

(A) De functies F en G zijn gelijk.

(B) Er bestaat een getal c zodat $F(x) = c \cdot G(x)$.

(C) De functievoorschriften van F en G kunnen hoogstens in een constante term verschillen.

(D) De functies F en G kunnen alleen tweedegraadsfuncties zijn.

3 Bereken.

1 $\int x(x-2)\,\mathrm{d}x$

2 $\int 3x(x+4)\,\mathrm{d}x$

3 $\int (2x-1)(2x+1)\,\mathrm{d}x$

4 $\int (4-x)(4+x)\,\mathrm{d}x$

5 $\int (3x+2)^2\,\mathrm{d}x$

6 $\int (x+2)(3x-1)\,\mathrm{d}x$

4 Omcirkel de onbepaalde integraal die gelijk is aan $\frac{2}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x + c$.

(A) $\int \left(\frac{2}{25}x^5 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$

(B) $\int \left(\frac{8}{5}x^5 - x^4 + 3x^2\right)\mathrm{d}x$

(C) $\int \left(\frac{2}{25}x^3 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x$

(D) $\int \left(\frac{8}{5}x^3 - x^2 + 3\right)\mathrm{d}x$

5 Als de grafiek van de functie f een dalende rechte is, dan is de grafiek van $\int f(x)\,dx$ een

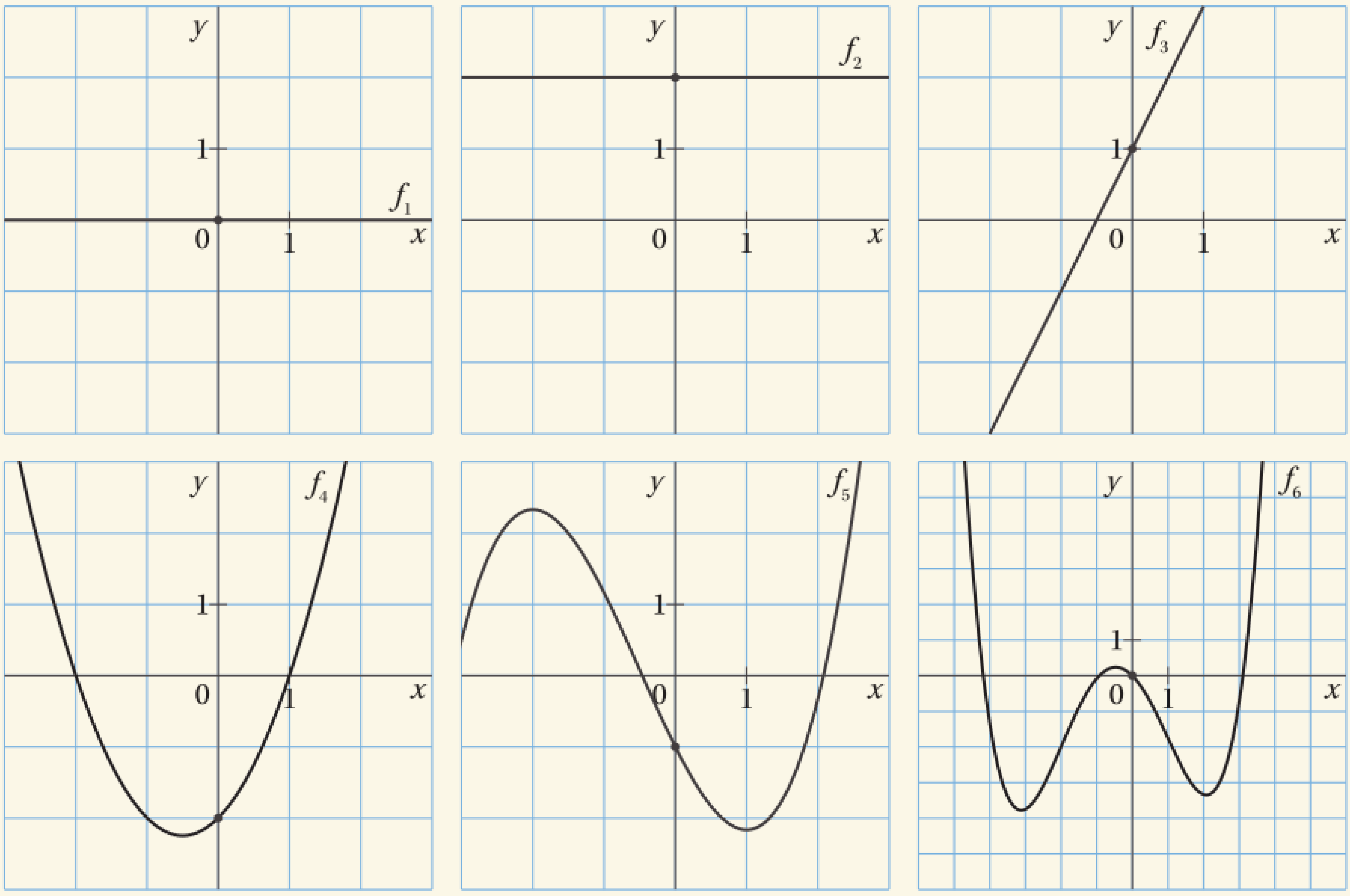
(A) dalparabool.

(B) bergparabool.

(C) horizontale rechte.

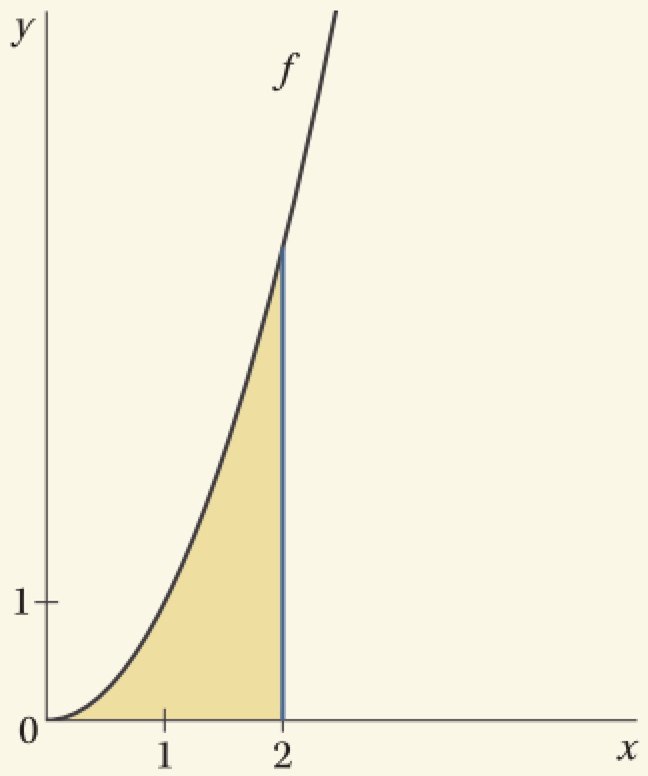
(D) stijgende rechte.

6 Elke rechte of kromme is de grafiek van een primitieve functie van de functie voorgesteld in de voorgaande grafiek. Bepaal het functievoorschrift van elke grafiek.

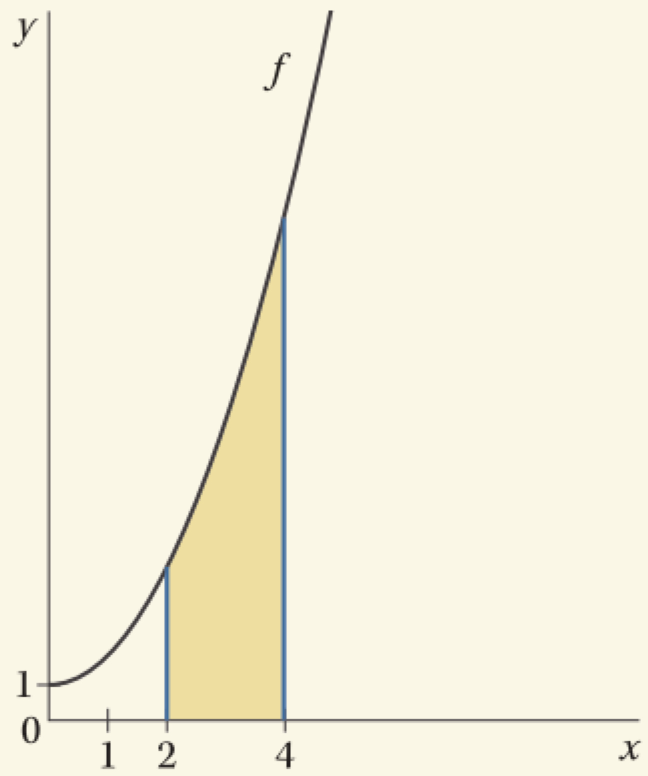


7 Gegeven is de grafiek van een functie f. Bereken met de passende oppervlaktefunctie het gekleurde gebied.

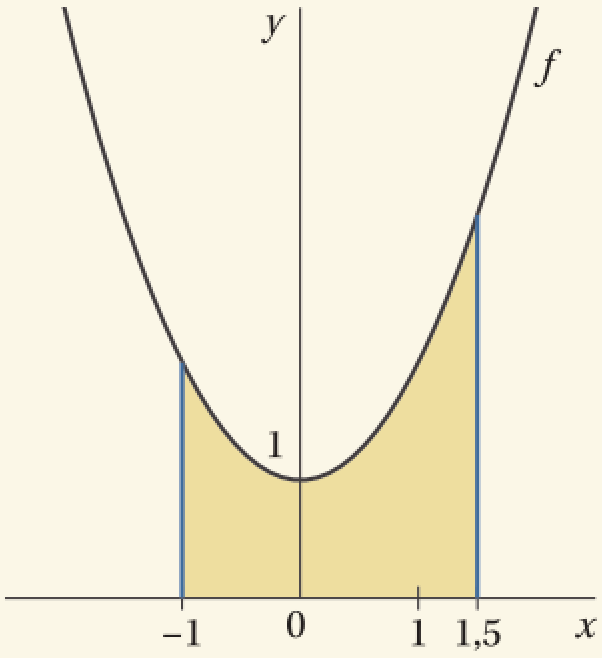
1 $f(x) = x^2$



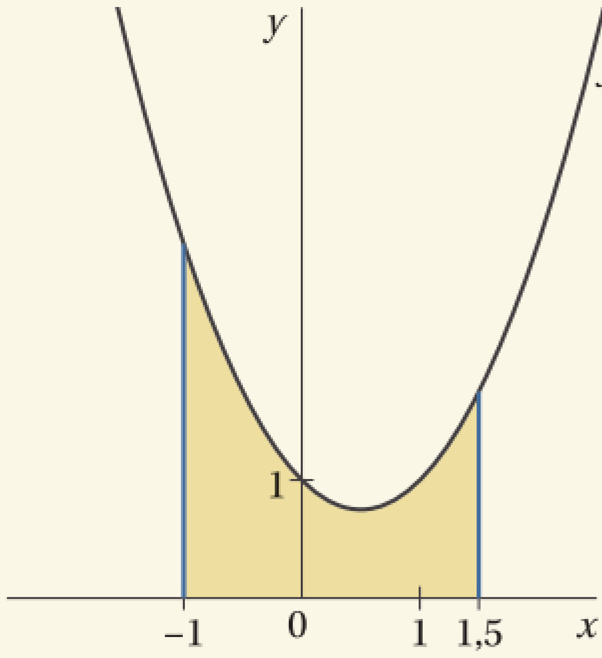
2 $f(x) = x^2 + 1$



3 $f(x) = x^2 + 1$



4 $f(x) = x^2 - x + 1$



8 Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van de functie $f(x) = -x^2 - 1$ en de x-as over het interval $[-1, 1]$.

2

Bepaalde integralen van veeltermfuncties

Het bepalen van de oppervlakte van een cirkel is een probleem waarover geleerden zich hebben gebogen. De 'yenri'-methode leunt aan bij de integraalrekening en wordt traditioneel toegeschreven aan de Japanse wiskundige Seki Kowa (1642–1708). Op de nevenstaande tekening uit 1670 wordt deze methode geïllustreerd.

- Het cirkeloppervlak is opgevuld met een reeks smalle rechthoeken.
- Men kiest steeds smallere rechthoeken.
- Zo bekomt men oneindig veel rechthoeken die oneindig smal zijn.

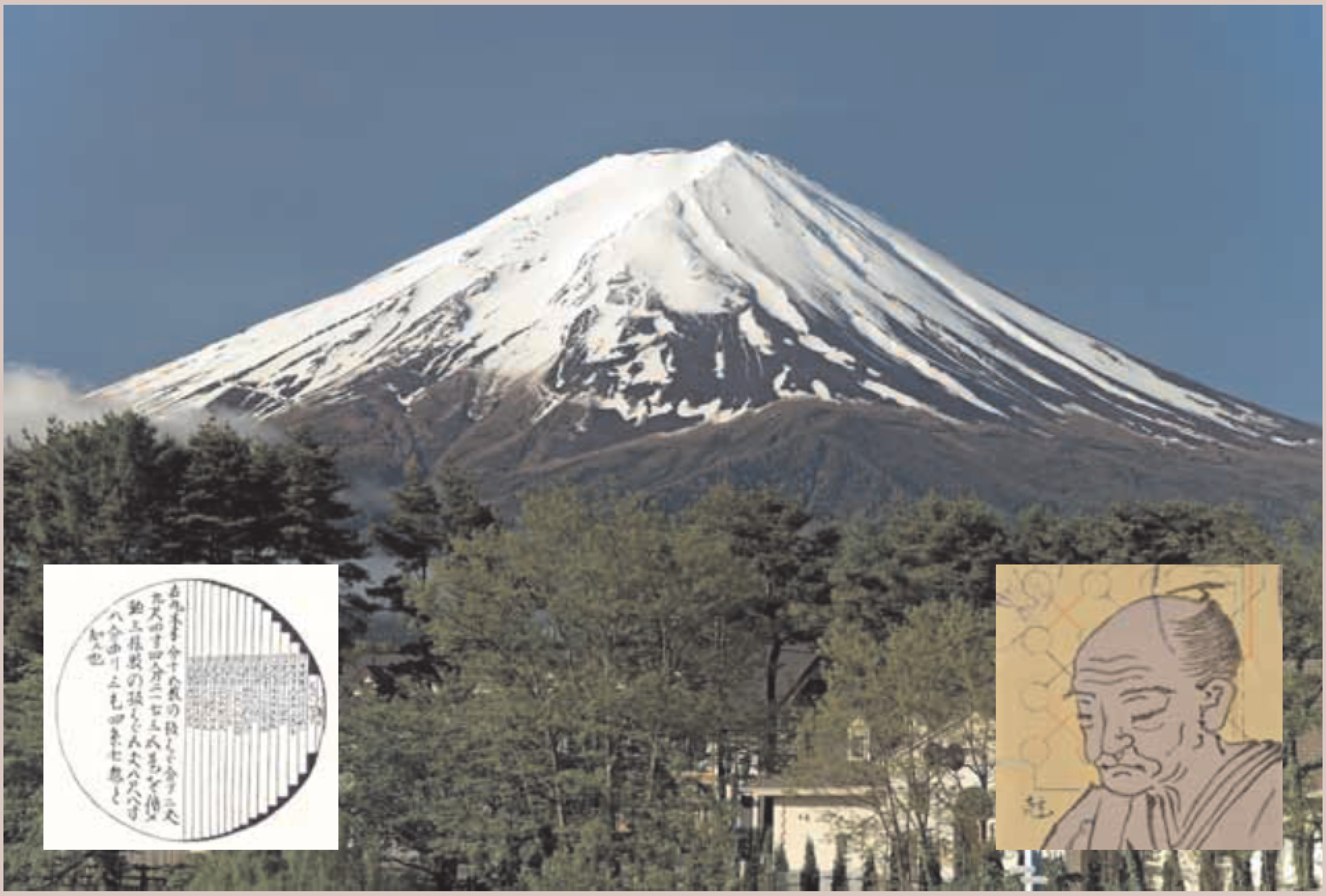
De som van de oppervlakten van deze oneindige reeks rechthoeken bereikt een grenswaarde die gelijk is aan de oppervlakte van de cirkel.

2.1 Bepaalde integralen

Sommeren en integreren	46
Hoofdstelling van de integraalrekening	62
Integraal en oppervlakte	68
Integralen van machten	90
Uitdagingen	94

2.2 Toepassingen

Oppervlakte tussen grafieken	99
Volume van omwentelingslichamen	107
Tijdsafhankelijke processen	113
Arbeid bij variabele krachten	119
Uitdagingen	122
Exploratie	133

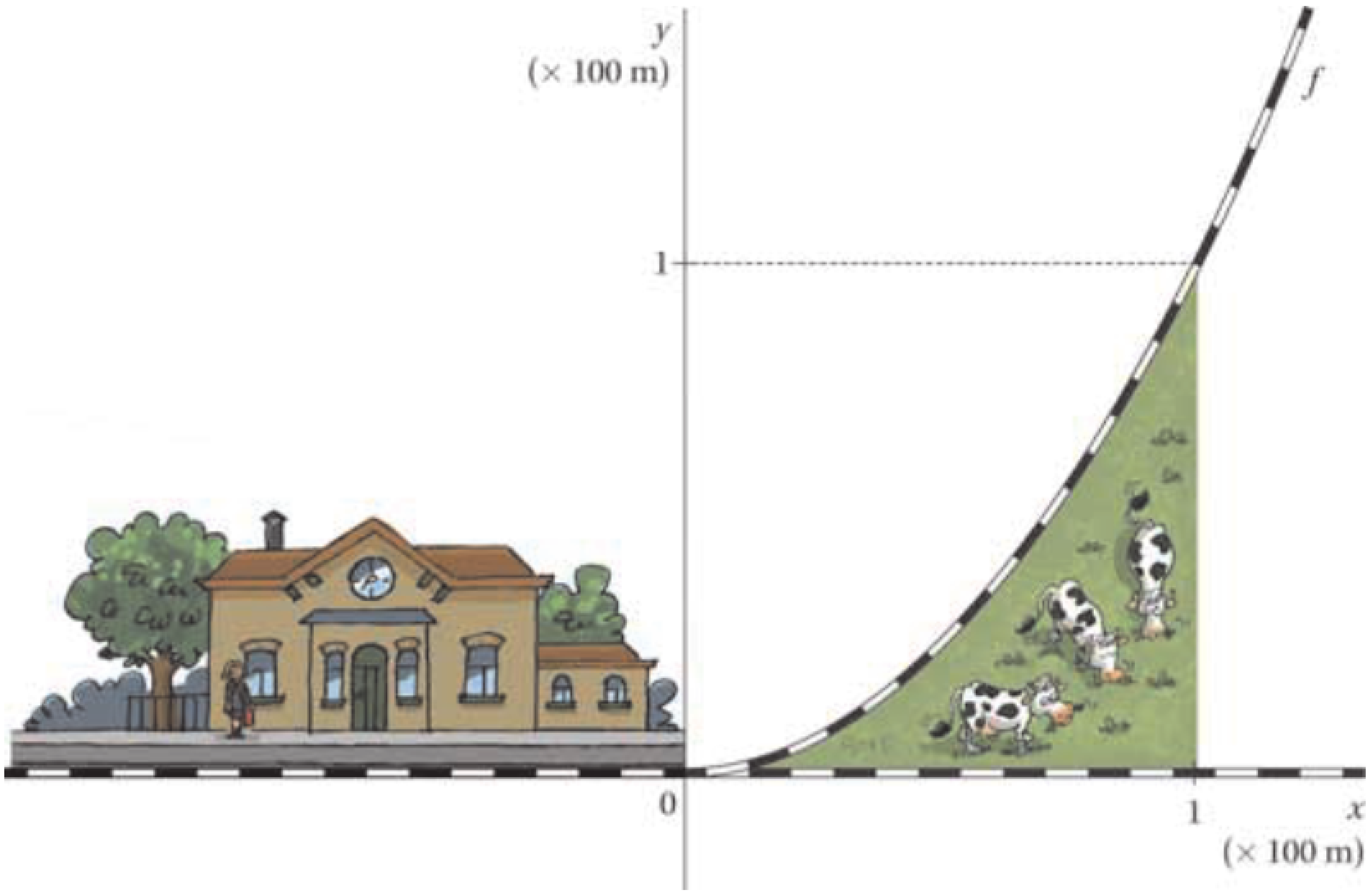


2.1 Bepaalde integralen

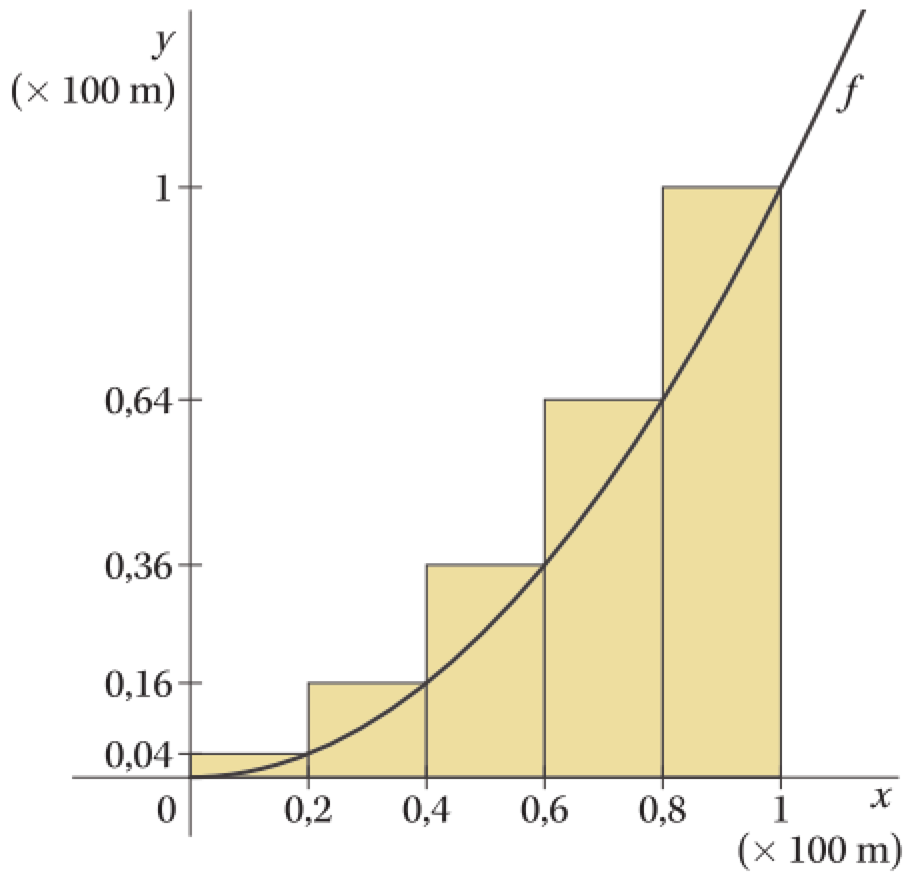
Sommeren en integreren

1 Instap

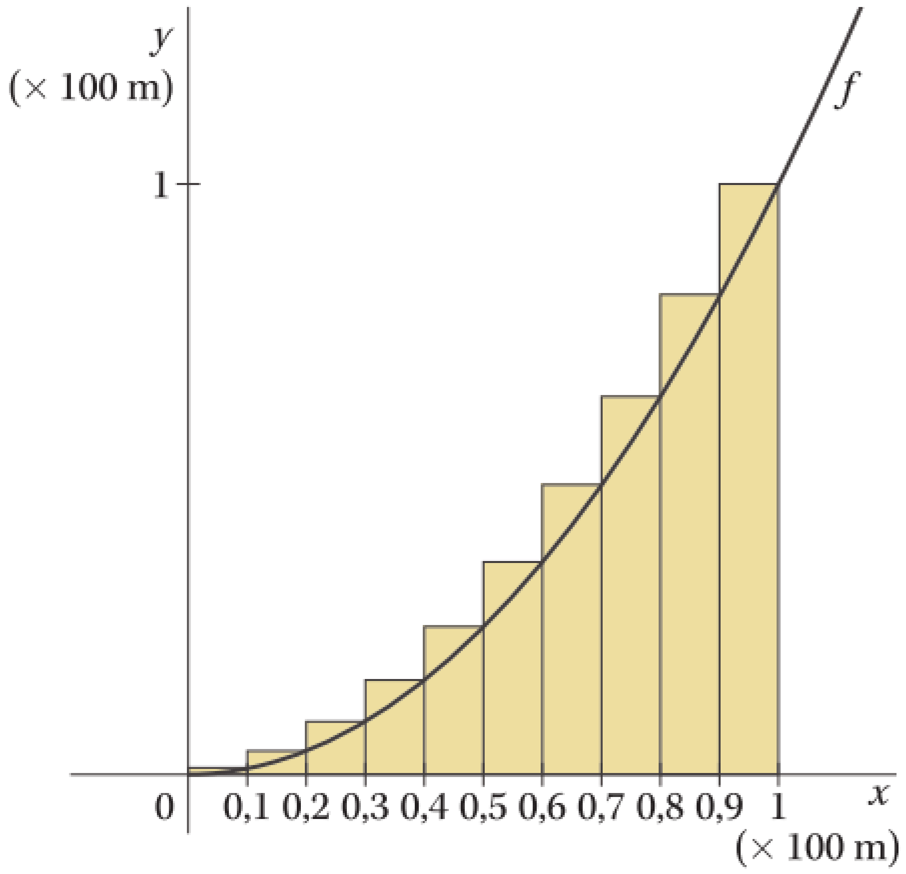
Nabij een station ligt een perceel landbouwgrond. Het perceel heeft de vorm van een ingedeukte driehoek en ligt tussen de vertakking van twee spoorlijnen, zoals aangegeven op de plattegrond.



1 De oppervlakte van dit perceel kunnen we als volgt benaderen.
We verdelen de basis van de ingedeukte driehoek in 5 gelijke delen. We construeren hierop 5 rechthoeken zodat de rechterbovenhoeken op de spoorlijn met voorschrift $f(x) = x^2$ liggen.
Bereken de som A van de oppervlakten van deze 5 rechthoeken.



2 De oppervlakte van het perceel kunnen we nauwkeuriger benaderen door de basis in 10 gelijke delen te verdelen. Bereken de som A van de oppervlakten van deze 10 rechthoeken.

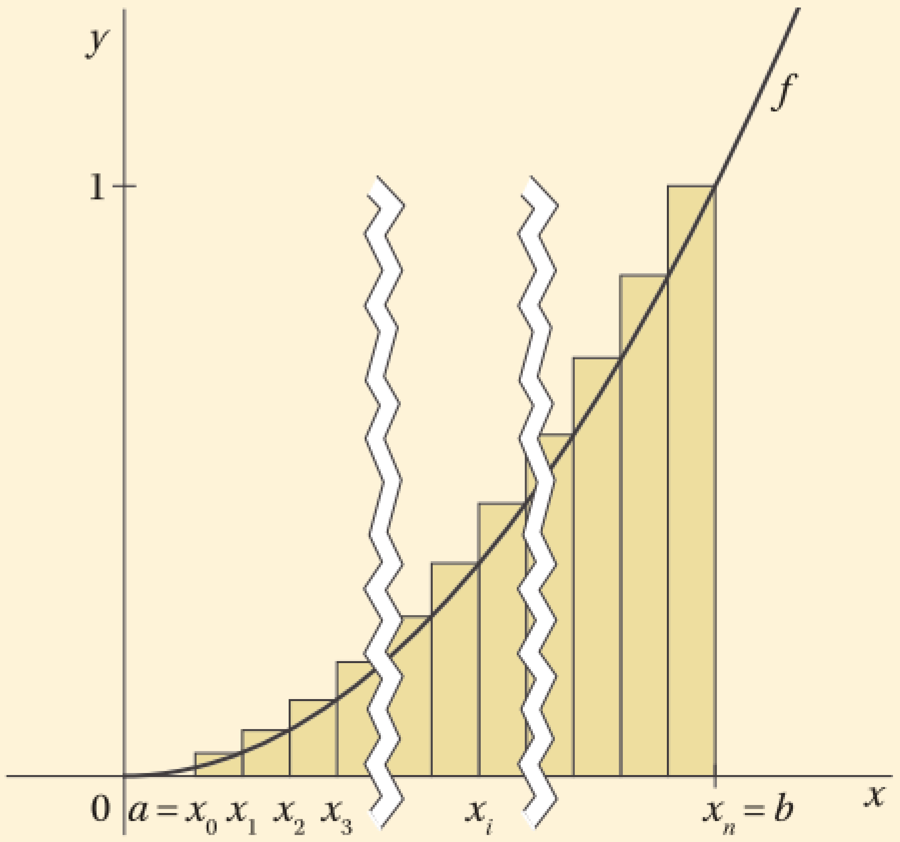


3 Hoe kunnen we de oppervlakte van het perceel nog nauwkeuriger benaderen?

4 Bereken de oppervlakte van het perceel met de oppervlaktefunctie A van f over het interval $[0, x]$.

Optellen van een eindig aantal oppervlakten

We beschouwen een veeltermfunctie f die positief is in een interval $[a, b]$. De oppervlakte A van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as over het interval $[a, b]$ kunnen we benaderen met n rechthoekjes. De basis van elk rechthoekje is het n-de deel van het interval $[a, b]$ en stellen we voor met Δx.



De oppervlakte van al deze rechthoekjes is gelijk aan de som:

$$f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + ... + f(x_i) \cdot \Delta x + ... + f(x_n) \cdot \Delta x$$

We kunnen deze som verkort noteren als:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

We lezen: de som van de termen $f(x_i) \cdot \Delta x$ voor i gaande van 1 tot n.

De Griekse hoofdletter Σ (sigma) noemen we het **sommatieteken** en i de sommatie-index. Deze notatie duidt aan dat we alle termen $f(x_i) \cdot \Delta x$ optellen die we verkrijgen door i achtereenvolgens gelijk te stellen aan 1, 2, 3, ... , n.

Het optellen van een **eindig** aantal oppervlakten noemen we **sommeren.** De oppervlakte A van het gebied kunnen we zo dicht benaderen als we willen door het aantal rechthoeken te verhogen.

2

Schrijf de som zonder sommatieteken.

1 $\sum_{i=1}^{6} x_i =$ ....

2 $\sum_{i=1}^{5} 2x_i =$ ....

3 $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 =$ ....

4 $\sum_{i=1}^{3} f(x_i) \cdot \Delta x =$ ....

5 $\sum_{i=1}^{2} i\, x_i =$ ....

6 $\sum_{i=1}^{1} x_i^3 =$ ....

3

Schrijf de som zonder sommatieteken en bereken.

1 $\sum_{i=1}^{6} i =$ ....

2 $\sum_{i=1}^{5} 0{,}5i =$ ....

3 $\sum_{i=1}^{4} 2^i =$ ....

4 $\sum_{i=1}^{3} (3i-2) =$ ....

5 $\sum_{i=1}^{2} 3^i =$ ....

6 $\sum_{i=1}^{1} 6^i =$ ....

4

Schrijf de som met een sommatieteken.

1 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 =$ ....

2 $f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + f(x_4) \cdot \Delta x =$ ....

3 $2 + 4 + 6 + ... + 100 =$ ....

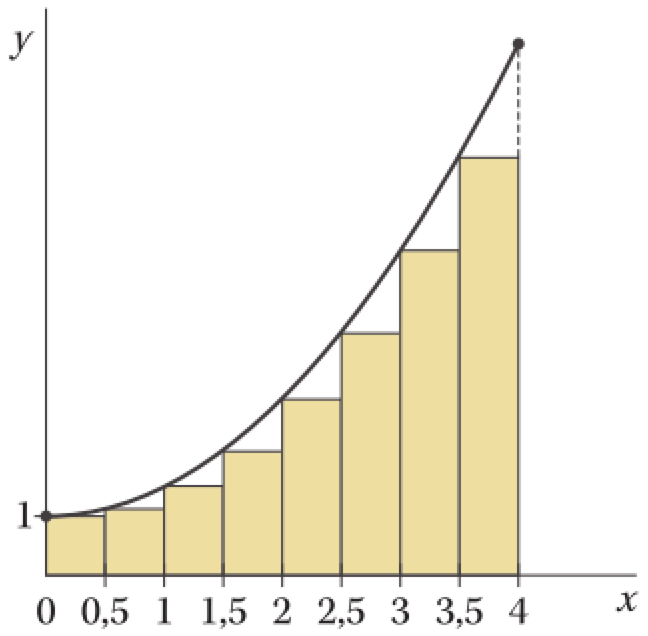
4 $1 + 3 + 5 + ... + 99 =$ ....

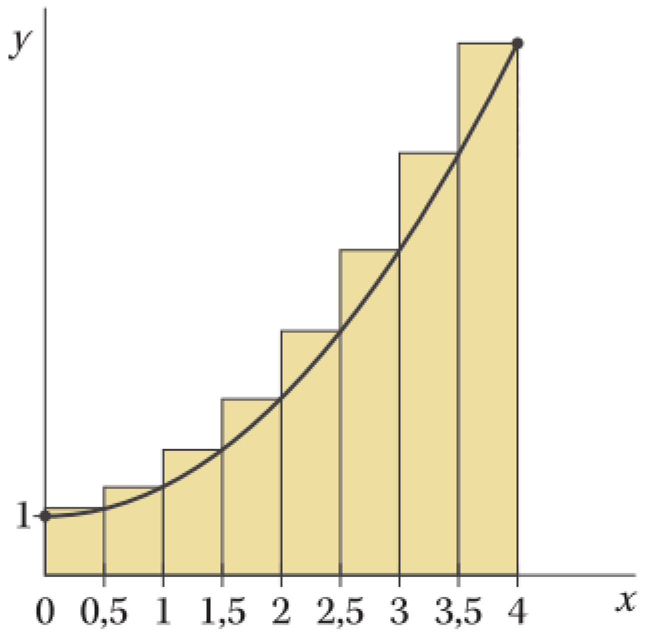
5 $1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + 4 \cdot f(4) =$ ....

6 $f(x_1) + 4 \cdot f(x_2) + 9 \cdot f(x_3) + 16 \cdot f(x_4) =$ ....

5

Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$ in het interval [0, 4]. We benaderen de oppervlakte van het gebied tussen het paraboolldeel en de x-as door de oppervlakten van 8 rechthoeken met basis 0,5 te sommeren.





De **ondersom** is de som van de oppervlakten van de rechthoeken die onder de kromme zijn gelegen.

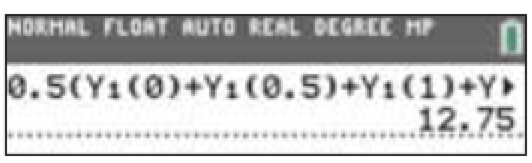
De ondersom is een benaderende waarde te klein van de oppervlakte onder de parabool.

De **bovensom** is de som van de oppervlakten van de rechthoeken die boven de kromme uitsteken.

De bovensom is een benaderende waarde te groot van de oppervlakte onder de parabool.

We berekenen de ondersom en de bovensom.

$$\begin{aligned}\text{ondersom} &= 0{,}5 \cdot f(0) + 0{,}5 \cdot f(0{,}5) + 0{,}5 \cdot f(1) + 0{,}5 \cdot f(1{,}5) + 0{,}5 \cdot f(2) + 0{,}5 \cdot f(2{,}5) + 0{,}5 \cdot f(3) + 0{,}5 \cdot f(3{,}5)\\ &= 0{,}5 \cdot \big(f(0) + f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2) + f(2{,}5) + f(3) + f(3{,}5)\big)\\ &= 0{,}5 \cdot 25{,}5\\ &= 12{,}75\end{aligned}$$



$$\text{bovensom} = 0{,}5 \cdot f(0{,}5) + 0{,}5 \cdot f(1) + 0{,}5 \cdot f(1{,}5) + 0{,}5 \cdot f(2) + 0{,}5 \cdot f(2{,}5) + 0{,}5 \cdot f(3) + 0{,}5 \cdot f(3{,}5) + 0{,}5 \cdot f(4)$$
$$= 0{,}5 \cdot \big(f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2) + f(2{,}5) + f(3) + f(3{,}5) + f(4)\big)$$
$$= 0{,}5 \cdot 33{,}5$$
$$= 16{,}75$$



1 Leid uit de vorige sommen een benadering af van de oppervlakte van het gebied tussen het parabooldeel en de x-as.

....

2 Bereken de oppervlakte van het gebied tussen het parabooldeel en de x-as met de oppervlaktefunctie over het interval $[0, x]$.

....

....

....

....

....

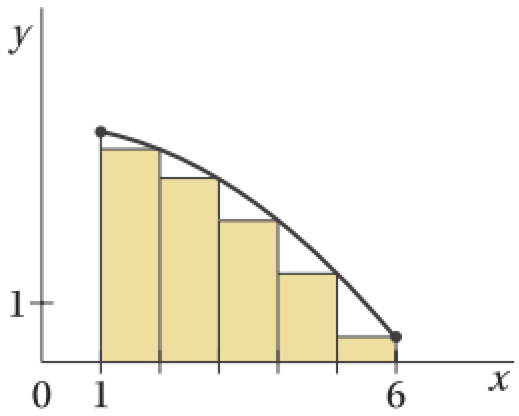
....

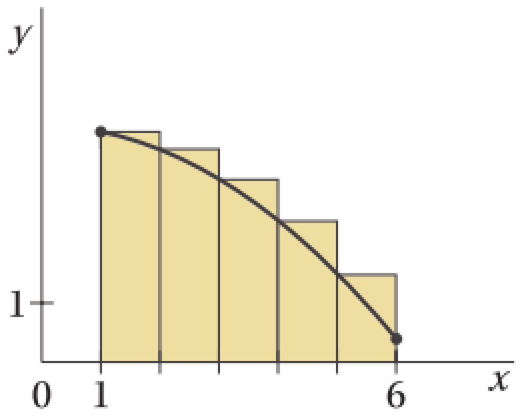
....

....

6

Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = -0{,}1x^2 + 4$ in het interval $[1, 6]$.





1 In de figuur links is het interval $[1, 6]$ verdeeld in 5 gelijke delen. Hierop zijn rechthoeken geconstrueerd zodat de rechterbovenhoeken op de grafiek van f liggen.

Bereken de bijbehorende ondersom.

....

....

....

2 In de figuur rechts is het interval [1, 6] ook verdeeld in 5 gelijke delen. Hierop zijn rechthoeken geconstrueerd zodat de linkerbovenhoeken op de grafiek van f liggen.

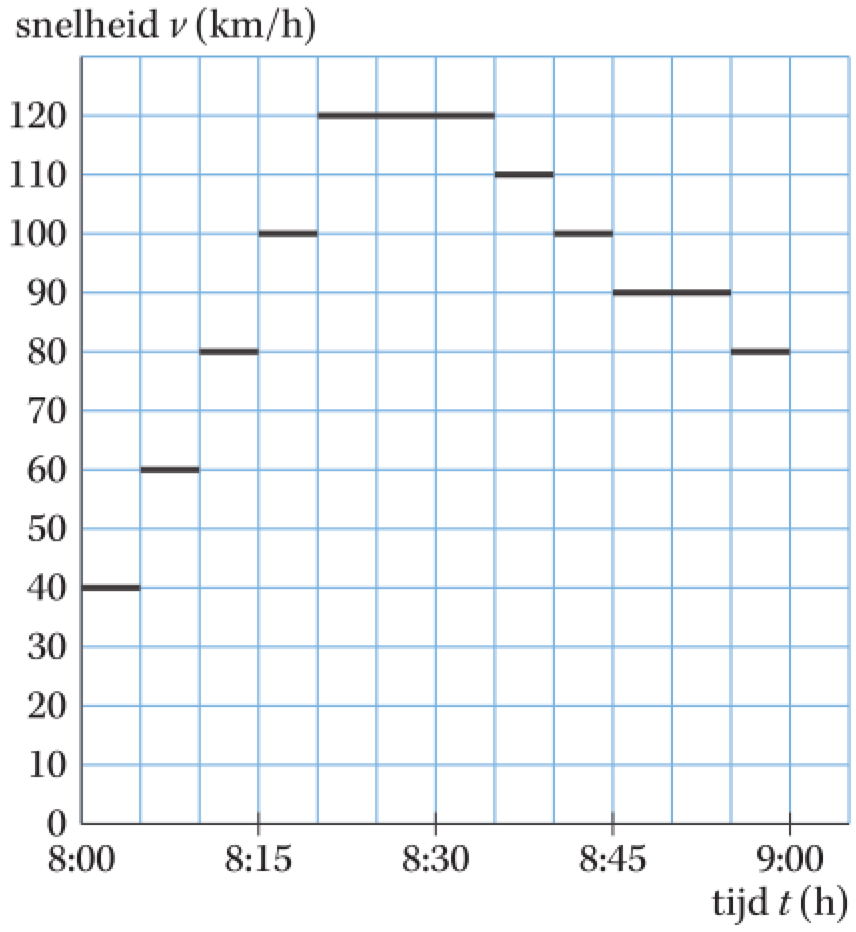
Bereken de bijbehorende bovensom.

3 Leid uit de vorige twee sommen een benadering af van de oppervlakte van het gebied tussen het parabooldeel en de x-as.

4 Bereken de oppervlakte met de oppervlaktefunctie over het interval $[1, x]$.

7

Gedurende een treinrit wordt om de 5 minuten de snelheid gemeten en uitgezet in een snelheidsgrafiek. We nemen aan dat de snelheid binnen elk tijdsinterval van 5 minuten constant is.



1 Benader de afstand die de trein aflegt tussen 8 en 9 uur.

....

....

....

....

2 Hoe kunnen we de afgelegde afstand nauwkeuriger benaderen?

....

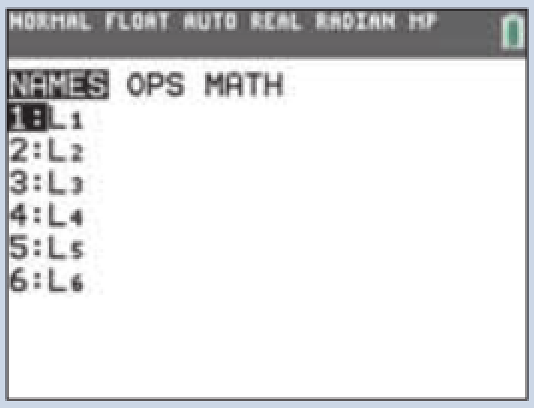
Optellen van een eindig aantal oppervlakten

We benaderen de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van $f(x) = x^2$ en de x-as over het interval [0, 1] met 10 rechthoeken waarvan de rechterbovenhoeken op de grafiek van f liggen (zie instap pagina 46).

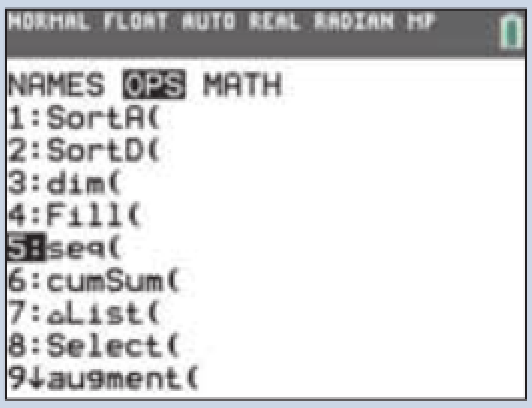
TEXAS INSTRUMENTS

Om de som van de oppervlakten van de rechthoeken met hoogten $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{10})$ en breedte $\Delta x = 0{,}1$ te berekenen, drukken we op de toets LIST en kiezen achtereenvolgens in het menu MATH de optie sum en in het menu OPS de optie seq (getallenrij).

■ [2ND] [LIST] [▶] [▶] [MATH] [5: sum] [2ND] [LIST] [▶] [OPS] [5: seq]

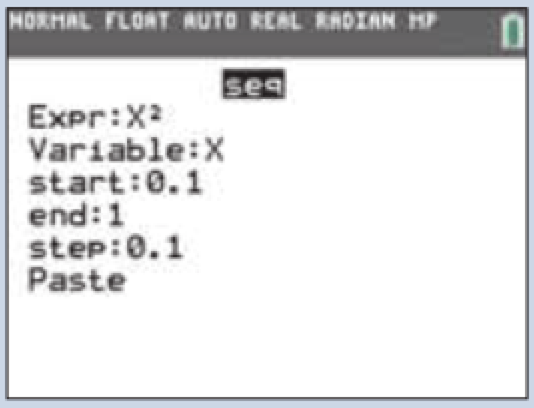


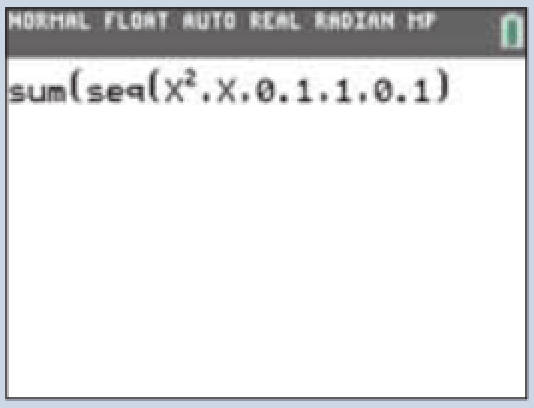




In het menu seq voeren we achtereenvolgens het functievoorschrift in, de variabele, de eerste en laatste term van de getallenrij en de stapgrootte.

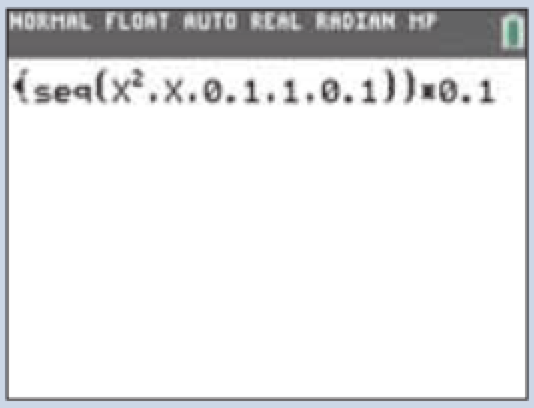
■ x^2 [ENTER] x [ENTER] 0,1 [ENTER] 1 [ENTER] 0,1 [ENTER] [ENTER]

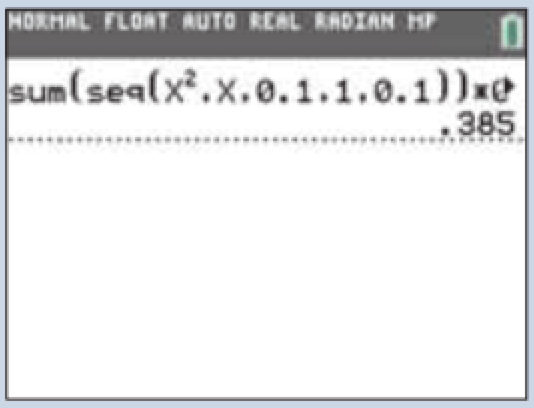




We vermenigvuldigen de som van de hoogten van de rechthoeken met de breedte 0,1.

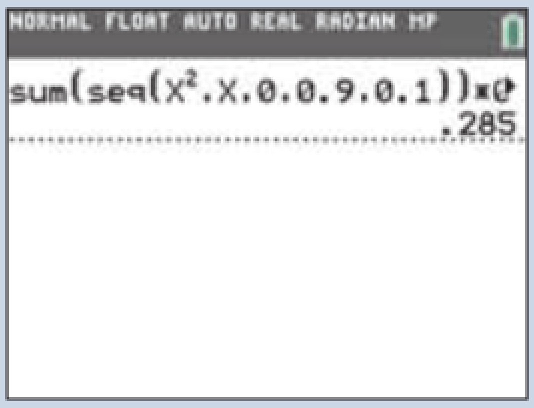
■ [)] [x] 0,1 [ENTER]





Deze benadering te groot van de oppervlakte is 0,385.

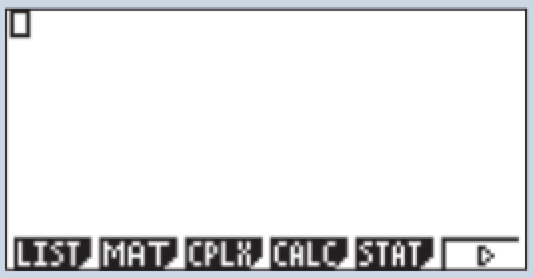
Als we werken met rechthoeken waarvan de linkerbovenhoeken op de grafiek van f liggen, dan is de eerste term van de getallenrij 0 en de laatste term 0,9. Deze benadering te klein van de oppervlakte is 0,285.

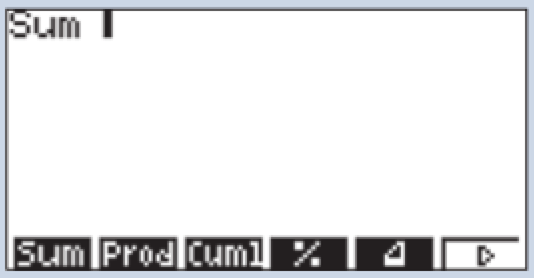


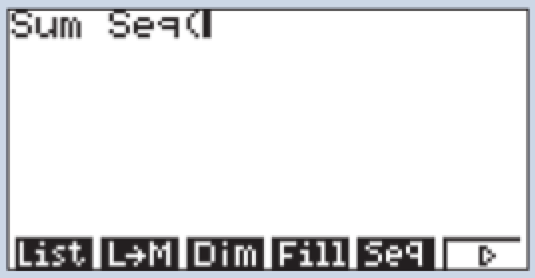
CASIO

Om de som van de oppervlakten van de rechthoeken met hoogten $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{10})$ en breedte $\Delta x = 0{,}1$ te berekenen, werken we in het menu RUN·MAT. We drukken op de toets OPTN en kiezen in het menu LIST de opties sum en seq (getallenrij).

■ [MENU] [1: RUN·MAT] [OPTN] [F1: LIST] [F6: ▷] [F6: ▷] [F1: Sum] [F6: ▷] [F5: Seq]

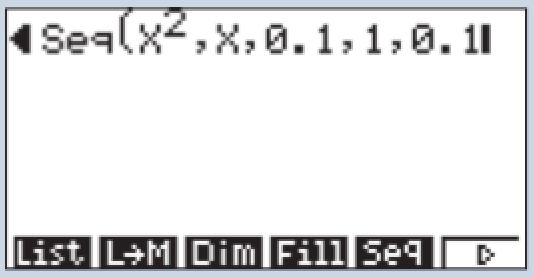






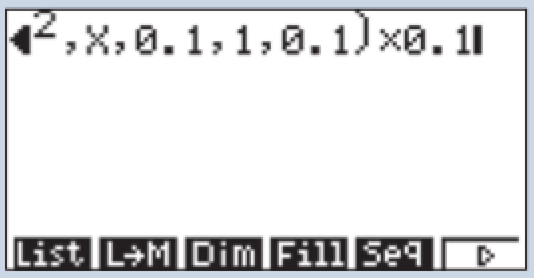
We voeren nu achtereenvolgens het functievoorschrift in, de variabele, de eerste en laatste term van de getallenrij en de stapgrootte.

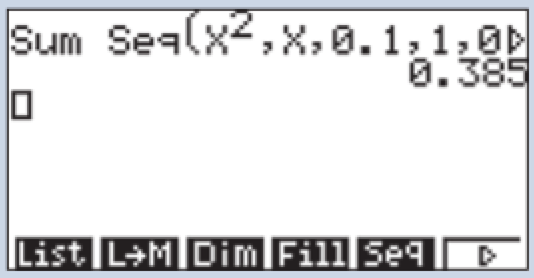
■ x^2 [,] x [,] 0,1 [,] 1 [,] 0,1



We vermenigvuldigen de som van de hoogten van de rechthoeken met de breedte 0,1.

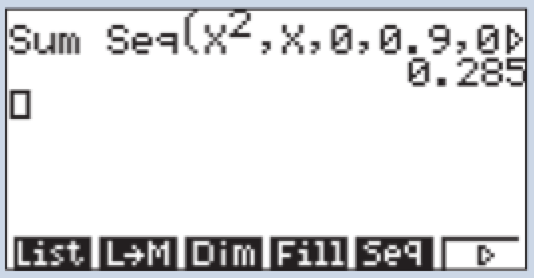
■ [)] [x] 0,1 [EXE]





Deze benadering te groot van de oppervlakte is 0,385.

Als we werken met rechthoeken waarvan de linkerbovenhoeken op de grafiek van f liggen, dan is de eerste term van de getallenrij 0 en de laatste term 0,9. Deze benadering te klein van de oppervlakte is 0,285.



8

Benader de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van de functie f en de x-as over het gegeven interval met n rechthoeken waarvan

a de rechterbovenhoeken op de grafiek liggen.

b de linkerbovenhoeken op de grafiek liggen.

1 $f(x) = x^2$ $[1, 4]$ $n = 30$

a oppervlakte 30 rechthoeken = ...

b oppervlakte 30 rechthoeken = ...

2 $f(x) = x^3$ [0, 2] $n = 20$

a oppervlakte 20 rechthoeken = ...

b oppervlakte 20 rechthoeken = ...

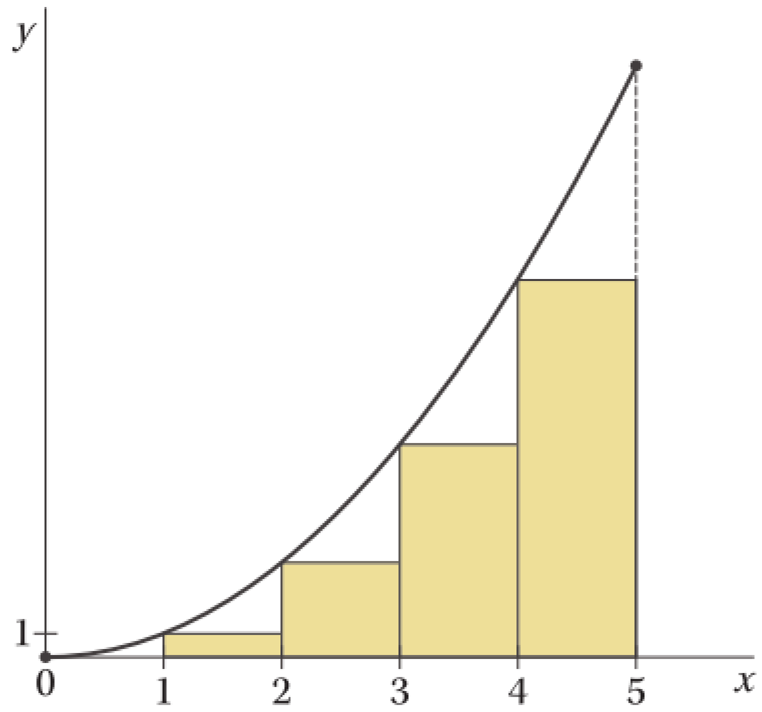
3 $f(x) = x^4$ [−2, −1] $n = 10$

a oppervlakte 10 rechthoeken = ...

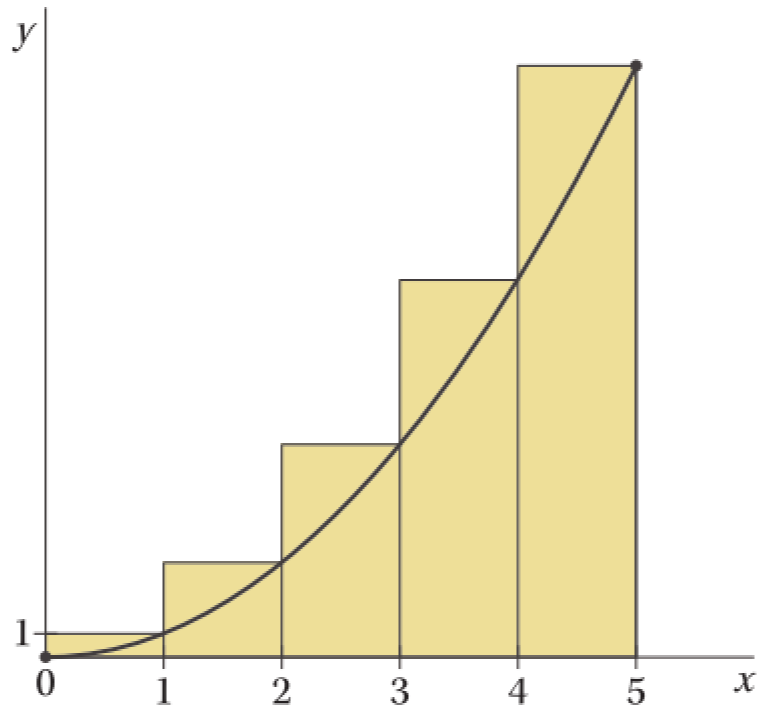
b oppervlakte 10 rechthoeken = ...

9

De oppervlakte van het gebied tussen de parabool $f(x) = x^2$ en de x-as over het interval [0, 5] kunnen we benaderen door de oppervlakten te sommeren van n rechthoeken met als basis het n-de deel van het interval [0, 5].



ondersom voor $n = 5$



bovensom voor $n = 5$

Een computer berekende zowel de ondersom als de bovensom van de rechthoeken.

n	ONDERSOM	BOVENSOM
1	0	125
2	15,625	78,125
3	23,1481482	64,8148148
4	27,34375	58,59375
5	30	55
6	31,8287037	52,6620371
7	33,1632653	51,0204082
8	34,1796875	49,8046875
9	34,9794239	48,8683128
10	35,625	48,125
20	38,59375	44,84375
30	39,6064815	43,7731482

n	ONDERSOM	BOVENSOM
40	40,1171875	43,2421875
50	40,425	42,925
60	40,630787	42,7141204
70	40,7780613	42,5637755
80	40,8886719	42,4511719
90	40,9747943	42,3636832
100	41,04375	42,29375
200	**41,3546875**	**41,9796875**
300	41,4585648	41,8752315
400	41,5105469	41,8230469
500	41,54175	41,79175
600	41,5625579	41,7708912
700	41,5774235	41,7559949
800	41,5885742	41,7448242
900	41,5972479	41,7361368
1000	41,6041875	41,7291875
2000	41,6354219	41,6979219
3000	41,6458356	41,6875023
4000	41,651043	41,682293
5000	41,6541675	41,6791675
6000	41,6562506	41,6770839
7000	41,6577385	41,6755957
8000	41,6588545	41,6744795
9000	41,6597225	41,6736114
10 000	41,6604169	41,6729169

1 Bepaal het verschil tussen de bovensom en de ondersom voor $n = 5$.

....

2 Controleer met ICT de ondersom en de bovensom voor $n = 200$.

Geef de gebruikte instellingen.

Ondersom: start = ... end = ... step = ...

Bovensom: start = ... end = ... step = ...

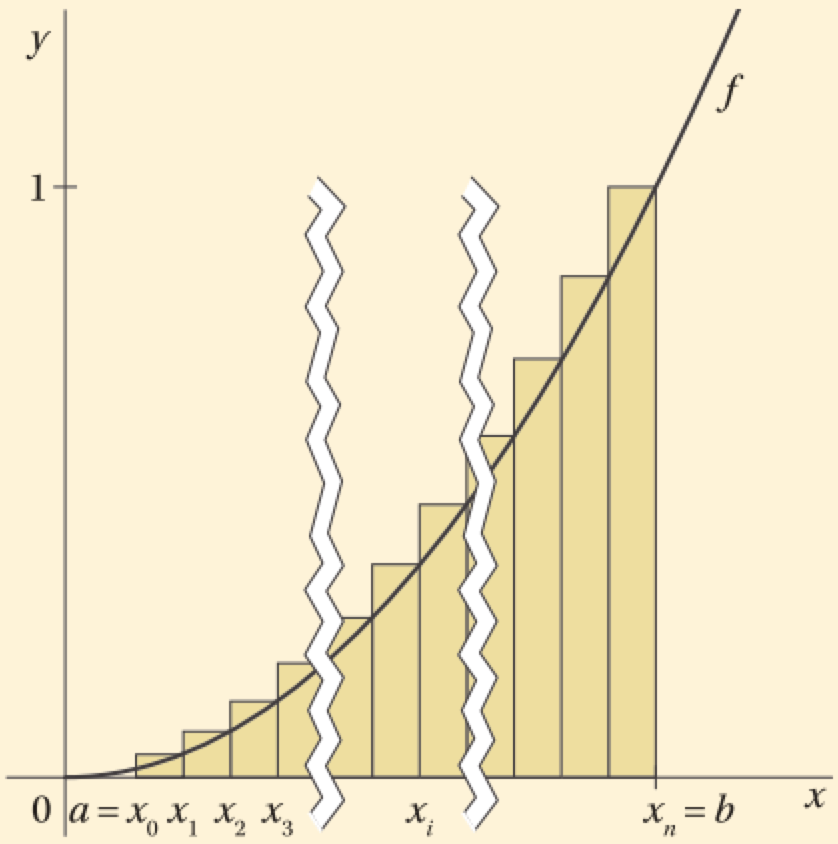
3 Vergelijk de ondersom en de bovensom bij 10 000 deelintervallen. Wat zal de vermoedelijke oppervlakte zijn?

....

4 Bereken de oppervlakte met de oppervlaktefunctie over het interval $[0, x]$.

Optellen van een oneindig aantal oppervlakten

Als we de oppervlakten van de n rechthoeken in de figuur bij elkaar optellen, krijgen we een benadering van de oppervlakte A van het gebied tussen de grafiek van de veeltermfunctie f en de x-as over het interval $[a, b]$.



We weten dat we deze som kunnen noteren met $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$.

Als we de breedte Δx van de rechthoeken verkleinen en bijgevolg het aantal rechthoeken laten toenemen, dan nadert deze som steeds dichter tot de oppervlakte A van het gebied.

We schrijven: $A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$

We lezen: de oppervlakte A is gelijk aan de limiet van $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$ voor Δx gaande naar 0.

Met de integraalnotatie schrijven we:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

f **is positief in het interval** $[a, b]$

We lezen: de oppervlakte A is gelijk aan de integraal van a tot b van de functie f.

Het optellen van een **oneindig** aantal oppervlakten noemen we ook **integreren**. We merken op dat het integraalteken (de langgerekte S van som) de rol van de Griekse letter sigma overgenomen heeft en dat Δx vervangen is door dx (een kleine toename van de variabele x).

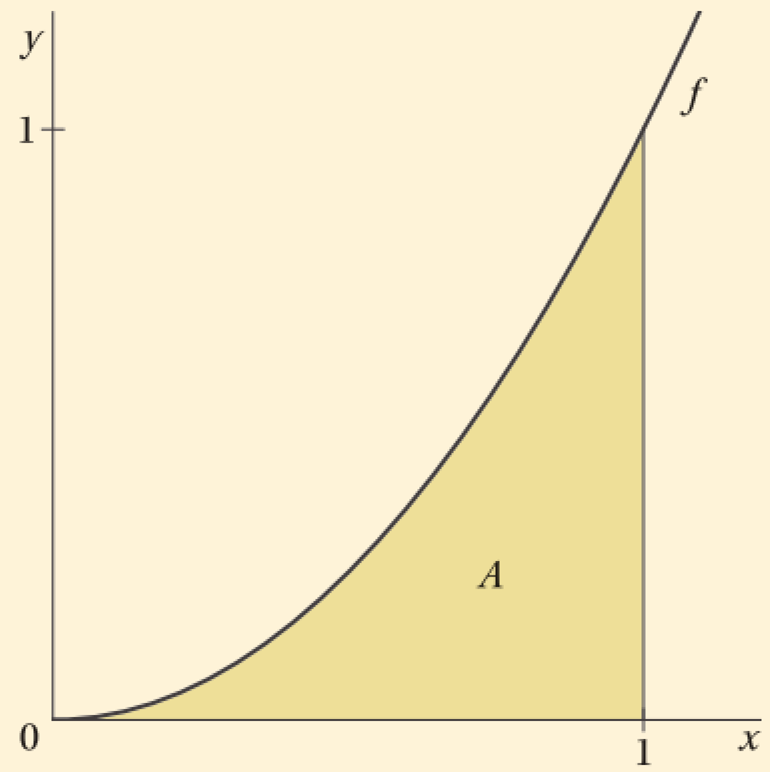
We noemen $\int_a^b f(x)\,dx$ de **bepaalde integraal** van de functie f tussen de grenzen a en b.

De getallen a en b heten respectievelijk de **ondergrens** en de **bovengrens** van de integraal.

Voorbeeld

De oppervlakte A van het gebied tussen de grafiek van $f(x) = x^2$ en de x-as over het interval [0, 1] schrijven we met de integraalnotatie als volgt:

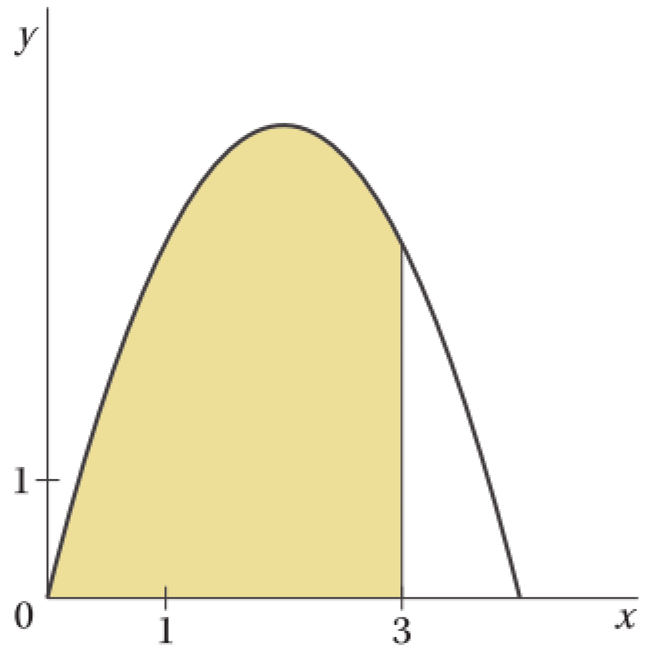
$$A = \int_0^1 x^2\,dx$$



10

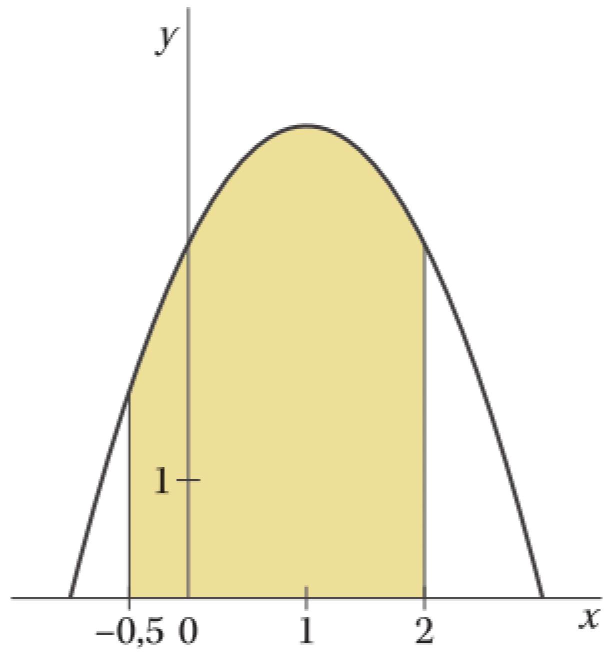
Schrijf de oppervlakte van het gekleurde gebied met de integraalnotatie.

1 $f(x) = -x^2 + 4x$



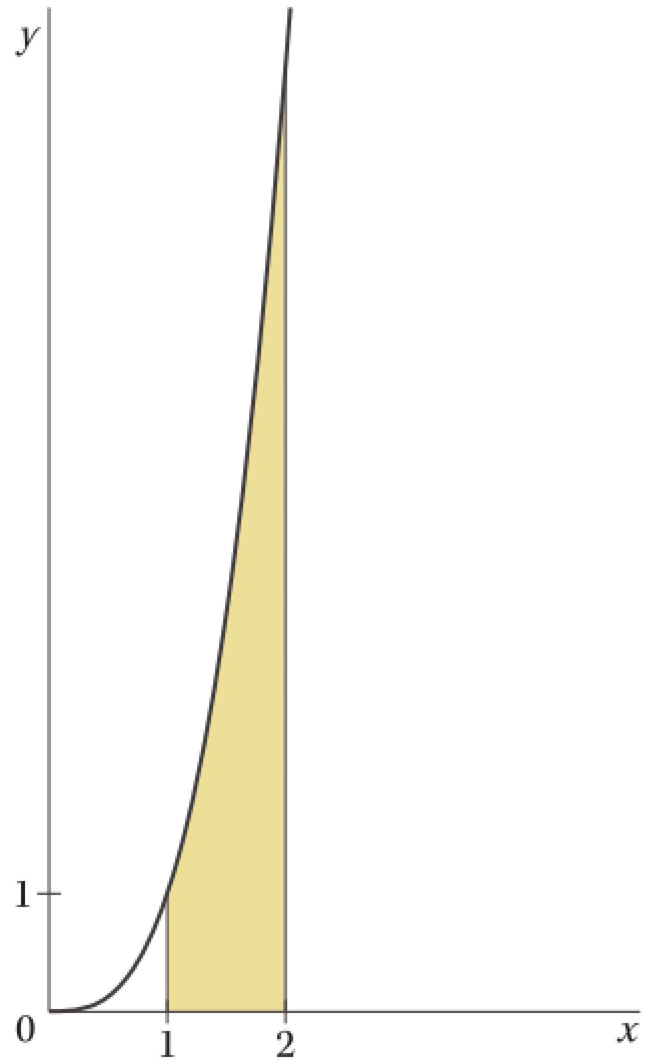
....

2 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

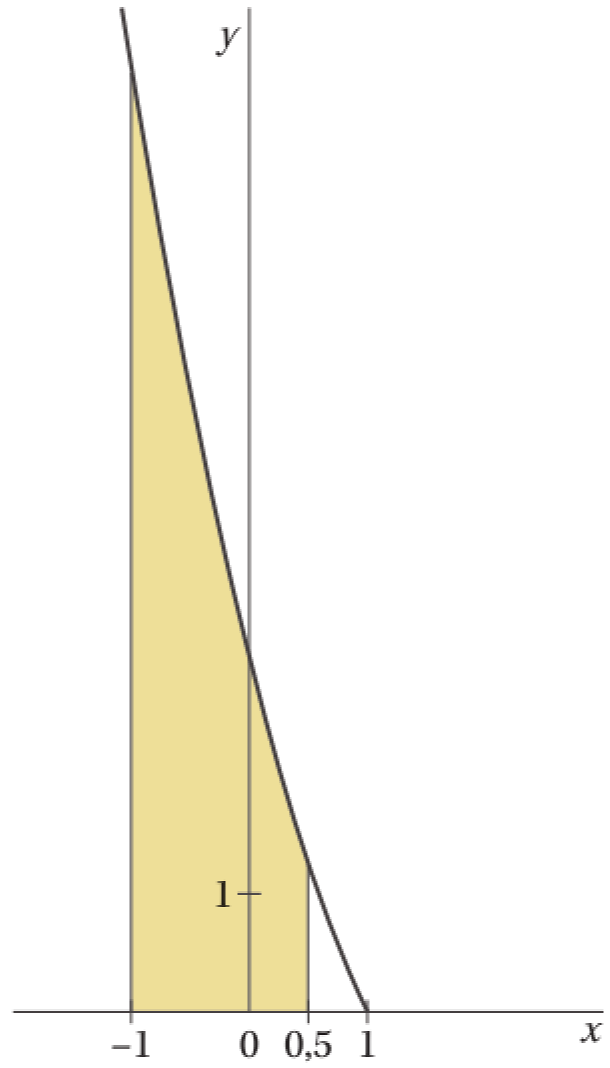


....

3 $f(x) = x^3$



4 $f(x) = x^2 - 4x + 3$



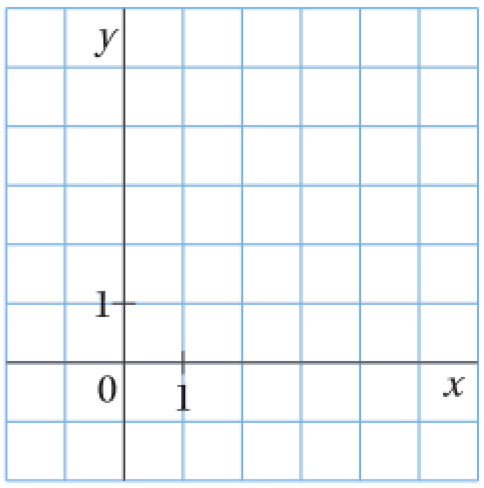
....

....

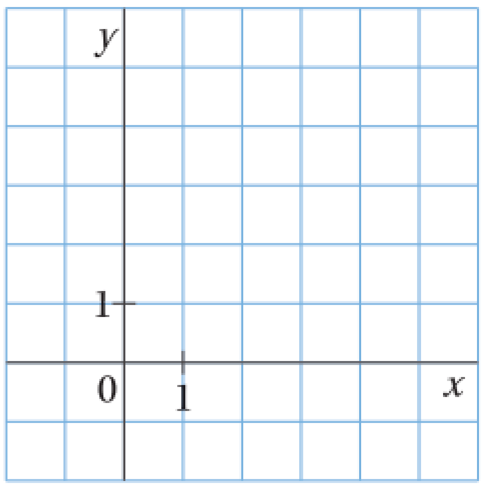
11

De bepaalde integraal stelt de oppervlakte van een gebied voor. Teken de grafiek en kleur dit gebied.

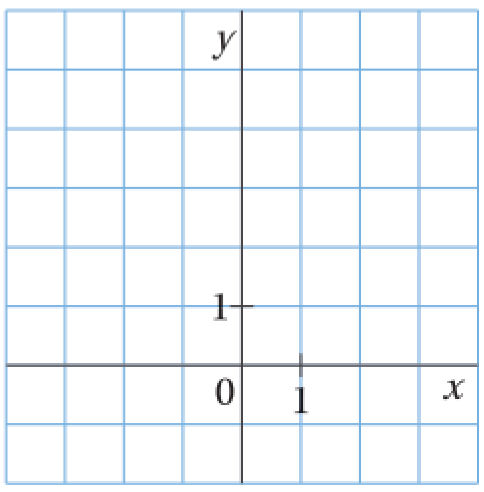
1 $\int_{0}^{4} (x+1)\,dx$



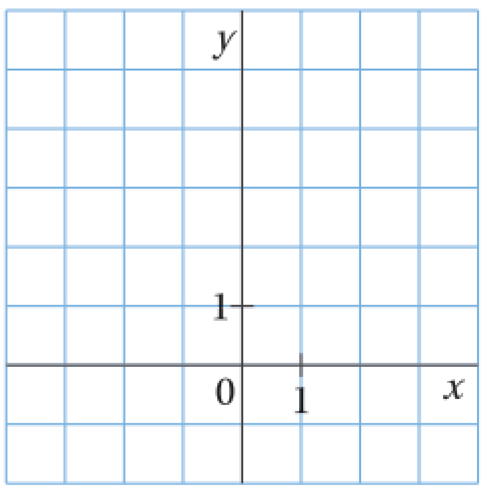
2 $\int_{-1}^{3} (-x+4)\,dx$



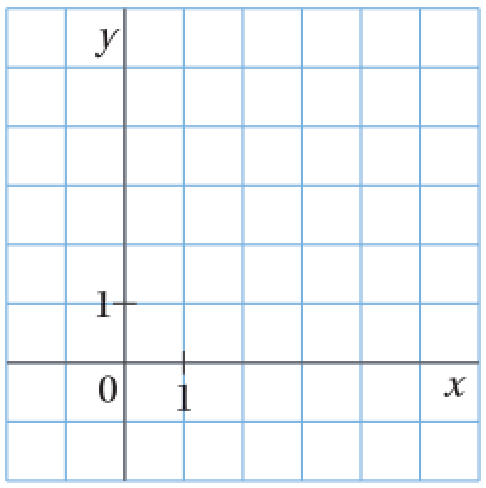
3 $\int_{-2}^{1} x^2\,dx$



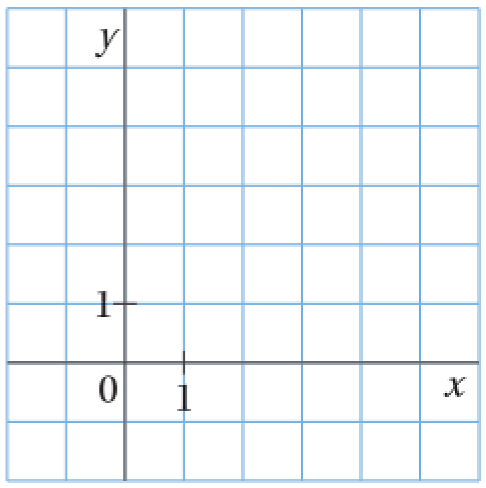
4 $\int_{-1}^{2} (-x^2+4)\,dx$



5 $\int_{1}^{5}(0{,}1x^2+2)\,dx$



6 $\int_{2}^{4}(0{,}25x^2+1)\,dx$

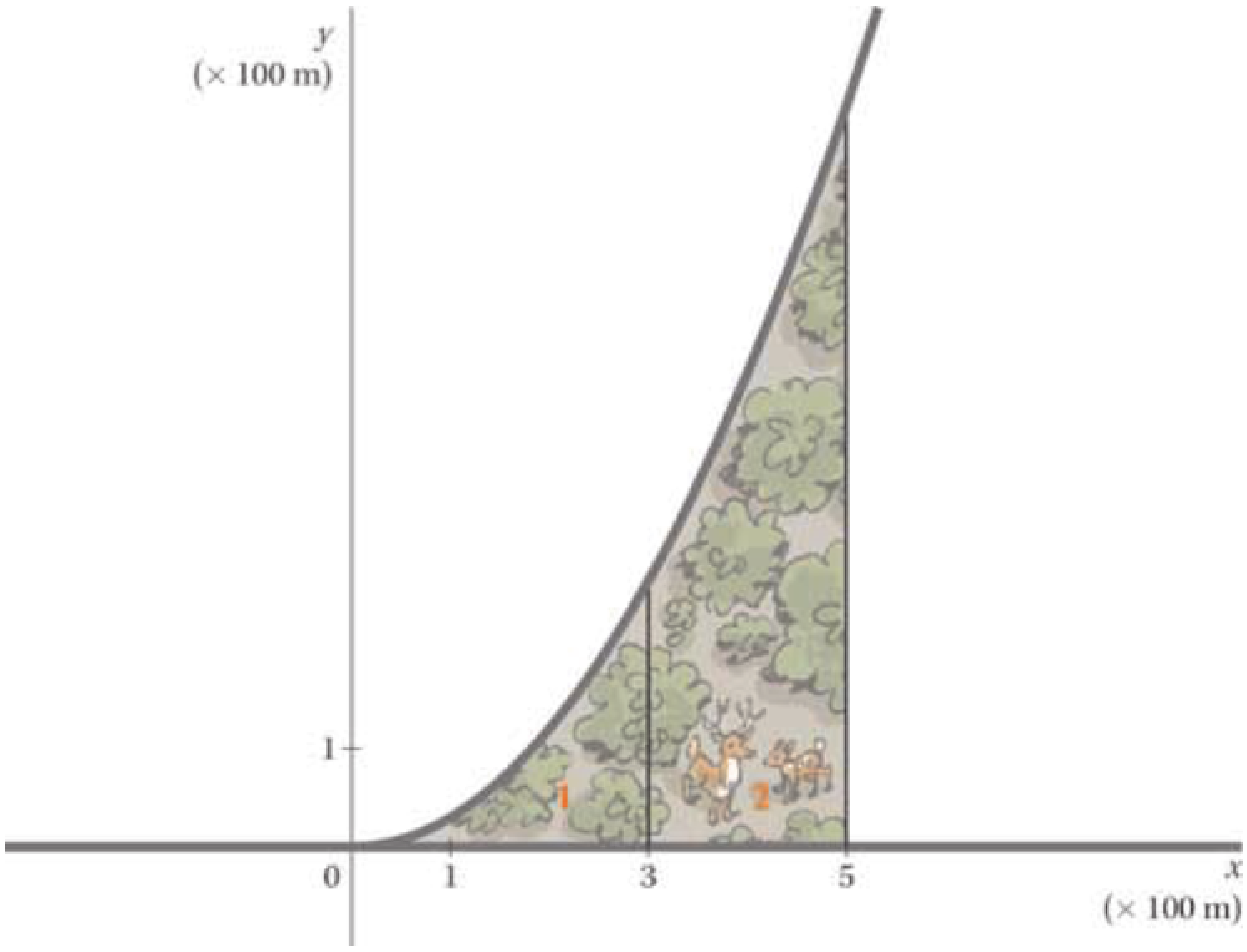




Hoofdstelling van de integraalrekening

12 Instap

Tussen twee wegen liggen twee percelen bosgrond, zoals voorgesteld op de tekening.



1 Bepaal de oppervlaktefunctie A van $f(x) = 0{,}3x^2$ over het interval $[0, x]$.

2 Schrijf de oppervlakte van perceel 2 als een verschil van twee functiewaarden van de oppervlaktefunctie A.

3 De oppervlaktefunctie A is een primitieve functie van f. Schrijf het verband dat bestaat tussen de functiewaarden $A(x)$ en de functiewaarden $F(x)$ van een willekeurige primitieve functie van f.

4 Schrijf de oppervlakte van perceel 2 met functiewaarden van de primitieve functie F.

5 Schrijf de oppervlakte van perceel 2 met een bepaalde integraal.

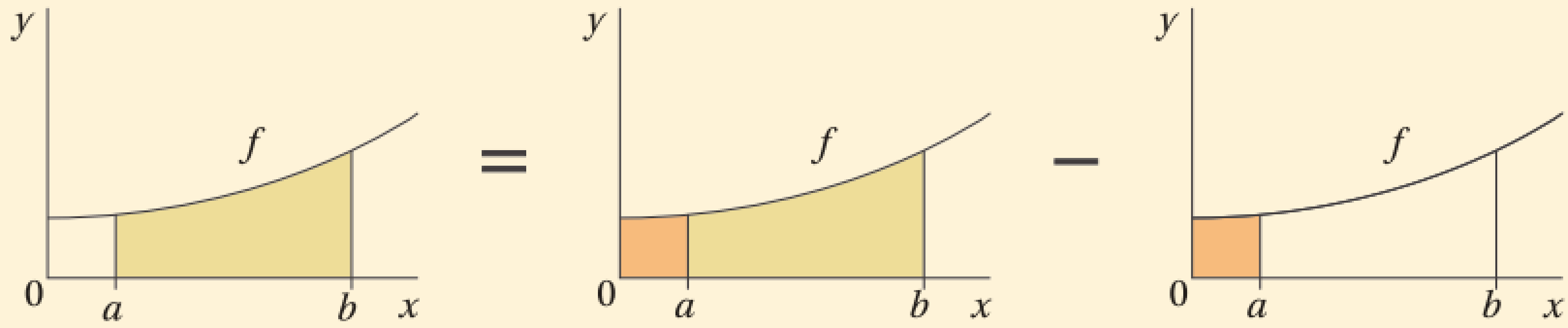
....

6 Schrijf de formule waarmee we deze bepaalde integraal kunnen berekenen met behulp van de primitieve functie F van f.

....

Hoofdstelling van de integraalrekening

De oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van de functie f en de x-as over het interval $[a, b]$ kunnen we beschouwen als een verschil van twee oppervlakten:



We schrijven:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_0^b f(x)\mathrm{d}x - \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

$$= A(b) - A(a)$$ **A is de oppervlaktefunctie van *f* over het interval [0, *x*]**

$$= \big(F(b) + c\big) - \big(F(a) + c\big)$$ **A(*x*) = F(*x*) + *c* waarbij *F* een primitieve functie is van *f***

$$= F(b) + c - F(a) - c$$

$$= F(b) - F(a)$$

Dit verschil kunnen we ook noteren met ‘verschilhaken’:

$$F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

Bijgevolg

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

f: veeltermfunctie die positief is in het interval $[a, b]$
F: primitieve functie van f

Deze rekenregel om een bepaalde integraal te berekenen, noemen we de **hoofdstelling van de integraalrekening**.

Merk op

Bij de integraalberekening heeft het geen belang welke primitieve functie we gebruiken:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)+c_1\right]_a^b = (F(b)+c_1)-(F(a)+c_1) = F(b)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)+c_2\right]_a^b = (F(b)+c_2)-(F(a)+c_2) = F(b)-F(a)$$

(De drie uitkomsten zijn gelijk: =, =)

Voorbeelden

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ is een primitieve functie van $f(x) = x^2$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3$$

verschilhaken uitwerken

$$= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\int_1^3 (0{,}3x^2+1)\,dx = \left[0{,}3\cdot\frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^3 = \left[0{,}1x^3+x\right]_1^3$$

$F(x) = 0{,}1x^3 + x$ is een primitieve functie van $f(x) = 0{,}3x^2 + 1$

$$= (0{,}1\cdot 3^3+3) - (0{,}1\cdot 1^3+1)$$

verschilhaken uitwerken

$$= 5{,}7 - 1{,}1 = 4{,}6$$

13

Bereken de bepaalde integraal met de hoofdstelling van de integraalrekening.

1 $\int_2^3 4x\,dx =$ ....

....

....

2 $\int_1^4 (-x+5)\,dx =$ ....

....

....

3 $\int_{1}^{2}(x^5+2x)\,dx =$ ...

4 $\int_{-2}^{4}(3x^2+x+2)\,dx =$ ...

14

Aan welk getal is de bepaalde integraal $\int_{-1}^{3}(-6x^2+4x-5)\,dx$ gelijk?

(A) -60 (B) -50 (C) -40 (D) -30

15

Bereken.

1 $\int 2x\,dx =$ ...

2 $\int_{1}^{3} 2x\,dx =$ ...

3 $\int (x+1)\,dx =$ ...

4 $\int_{0}^{4}(x+1)\,dx =$ ...

16

Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as over het gegeven interval.

1 $f(x) = x - 1$ $[4, 6]$

2 $f(x) = x^2 + 1$ $[1, 4]$

3 $f(x) = x^3$ $[0, 1]$

4 $f(x) = x^3 - 5$ $[2, 3]$

17

Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as over het interval gelegen tussen de snijpunten en/of de raakpunten van de grafiek van f met de x-as. Bepaal eerst het interval met ICT.

1 $f(x) = -x^2 + 9$

2 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

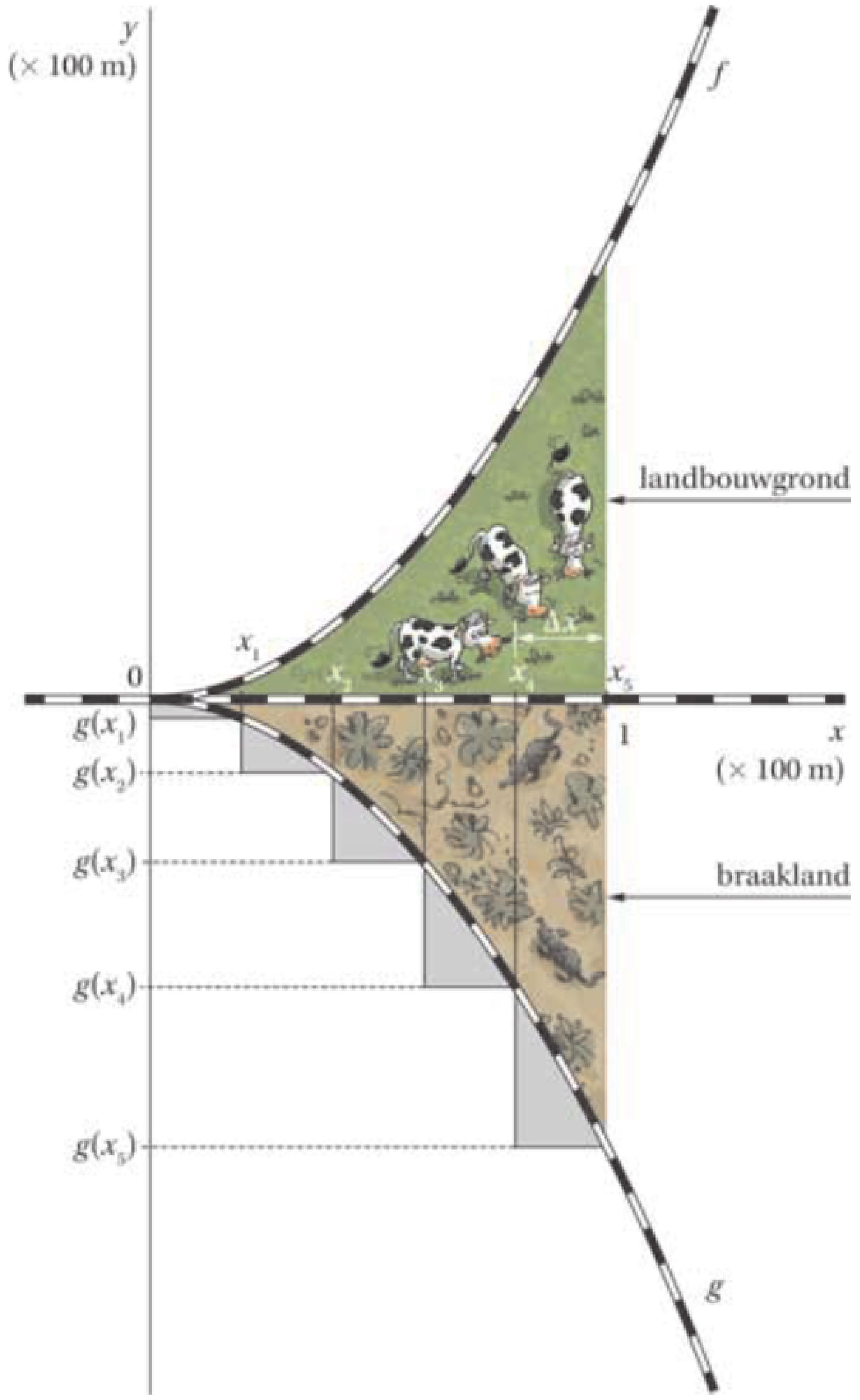
3 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

4 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

▶ Integraal en oppervlakte

18 Instap

Aan de vertakking van de twee spoorlijnen in de instap op pagina 46 ligt nog een afgedankte spoorlijn met voorschrift $g(x) = -x^2$. De grafieken van f en g zijn symmetrisch ten opzichte van de x-as. Bijgevolg is het stuk braakland even groot als het perceel landbouwgrond.



We verdelen de basis van de ingedeukte driehoek in 5 gelijke delen en construeren hierop 5 rechthoeken zodat de rechterbenedenhoeken op de afgedankte spoorlijn liggen.

1 Stellen de producten $g(x_1) \cdot \Delta x, g(x_2) \cdot \Delta x, \ldots, g(x_5) \cdot \Delta x$ de oppervlakten van de geconstrueerde rechthoeken voor? Verklaar!

....

2 Welk verband bestaat er tussen de som van de oppervlakten van de 5 rechthoeken en de som $\sum_{i=1}^{5} g(x_i) \cdot \Delta x$?

....

Voor een veeltermfunctie f die positief is in een interval $[a, b]$ hebben we de limiet

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$ genoteerd als de bepaalde integraal $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (zie pagina 58).

Als we deze afspraak uitbreiden voor elke veeltermfunctie, dan kunnen we de limiet

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot \Delta x$ ook noteren als de bepaalde integraal $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

We kunnen aantonen dat de hoofdstelling van de integraalrekening (zie pagina 63) geldig is voor elke veeltermfunctie:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

***f*: willekeurige veeltermfunctie**
F*: primitieve functie van *f

3 Bereken $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ en $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ met de hoofdstelling.

....

....

4 Welk verband bestaat er tussen deze twee bepaalde integralen? ....

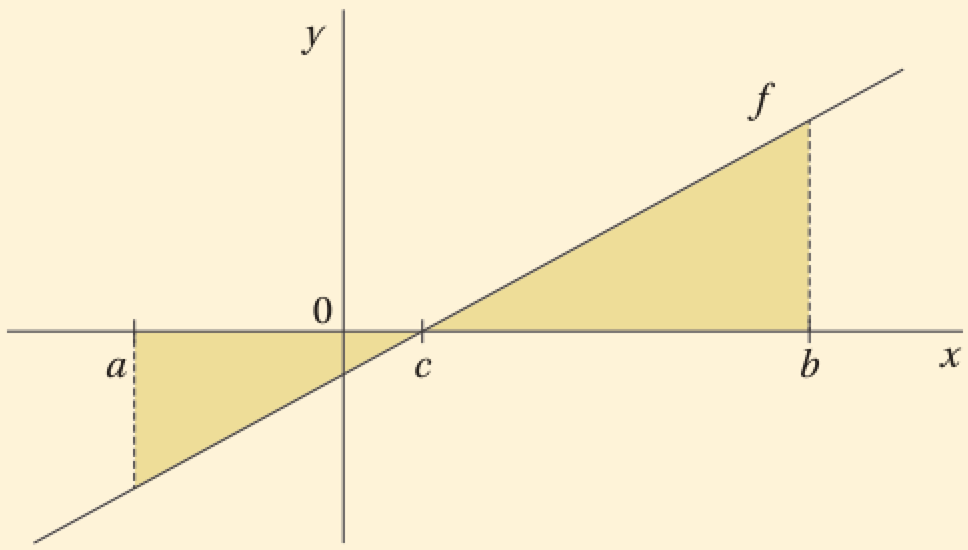
5 Schrijf het verband tussen de oppervlakte A van de ingedeukte driehoek en de bepaalde integraal $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

....

Verband tussen oppervlakte en integraal

Tot nu toe stelde de bepaalde integraal van een functie f tussen de grenzen a en b de oppervlakte van een gebied voor. Deze voorstelling geldt echter alleen als de functie f **positief** is in het interval $[a, b]$!

Op de grafiek van de functie f stellen we vast dat de functie **van teken verandert** in de nulwaarde c van de functie.



x	a		c		b
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Uit de tekentabel van de functie f volgt dat:

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x < 0 \quad \text{en} \quad \int_c^b f(x)\mathrm{d}x > 0$$

Als de functiewaarden negatief zijn, wordt ook de integraal van de functie negatief. Omdat oppervlakten positief zijn, moeten we dan rekenen met de tegengestelden van deze functiewaarden.

Bijgevolg geldt voor de oppervlakte A van het gekleurde gebied:

$$A = -\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

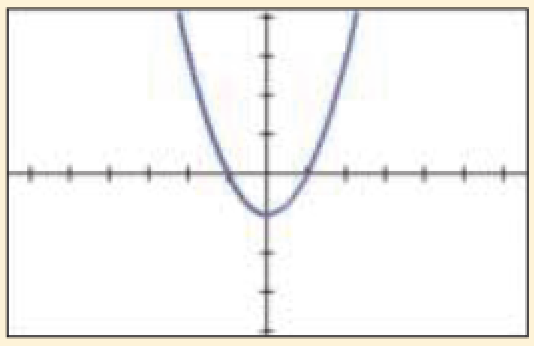
Voorbeeld

We berekenen de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van $f(x) = x^2 - 1$ en de x-as over het interval [0, 2].

Tekentabel van $f(x) = x^2 - 1$:

x		-1		1	
$f(x)$	+	0	−	0	+

Ter controle kunnen we met ICT de grafiek van f tekenen.



Om de gevraagde oppervlakte te berekenen, splitsen we het interval [0, 2] op in het interval [0, 1] waarin f negatief is en het interval [1, 2] waarin f positief is:

$$A = -\int_0^1 (x^2 - 1)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2 - 1)\mathrm{d}x$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 \qquad \textbf{hoofdstelling van de integraalrekening}$$

$$= -\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 1\right) - 0\right) + \left(\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 1\right)\right) \qquad \textbf{verschilhaken uitwerken}$$

$$= -\left(\frac{1}{3} - 1\right) + \left(\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$$

$$= 2$$

Merk op

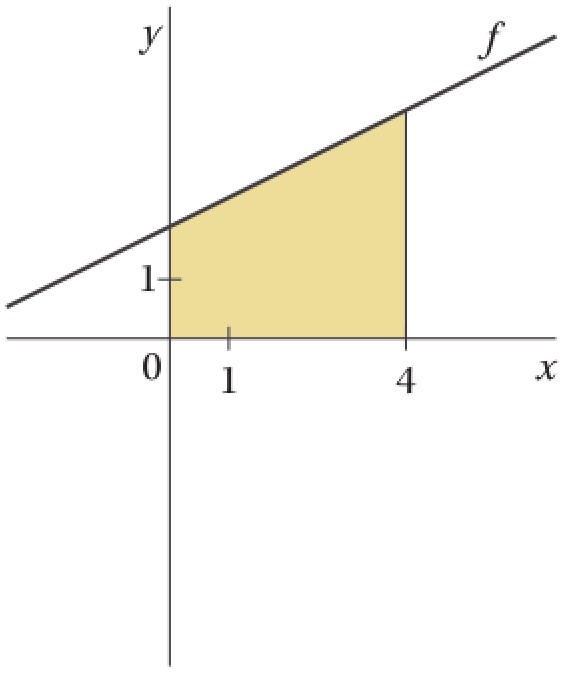
De bepaalde integraal van $f(x) = x^2 - 1$ tussen de grenzen 0 en 2 geeft een fout rekenresultaat voor de oppervlakte.

$$\int_0^2 (x^2 - 1)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^2 = \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2\right) - 0 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

19

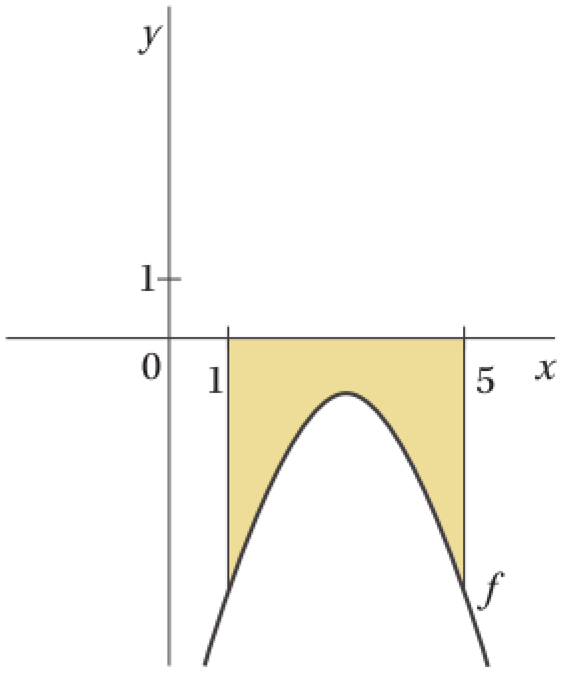
Stelt de bepaalde integraal de oppervlakte van het gekleurde gebied voor? Zo neen, noteer dan deze oppervlakte met passende bepaalde integralen.

1 $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$



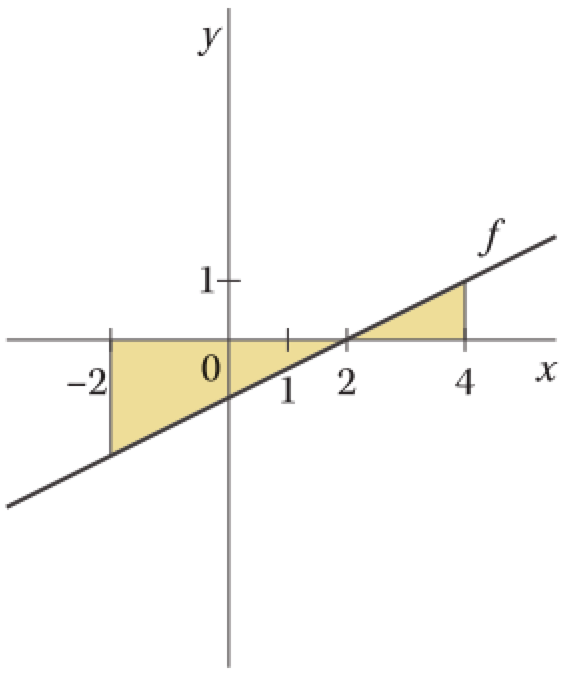
....

2 $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$



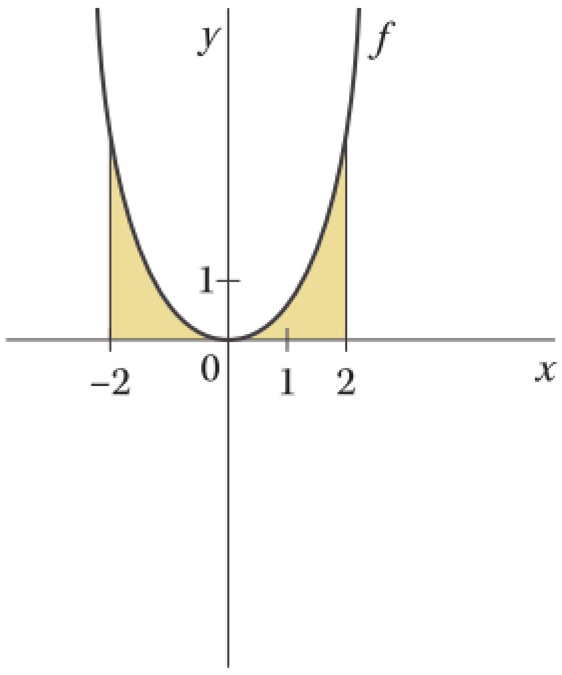
....

3 $\int_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x$



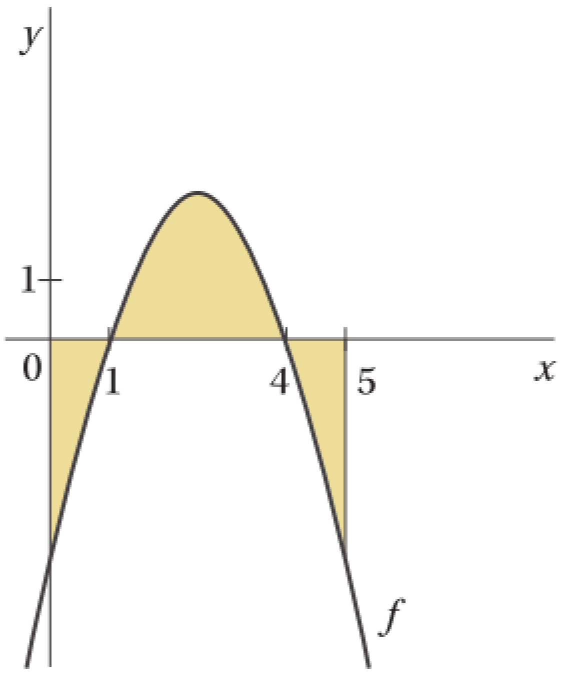
....

4 $\int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x$



....

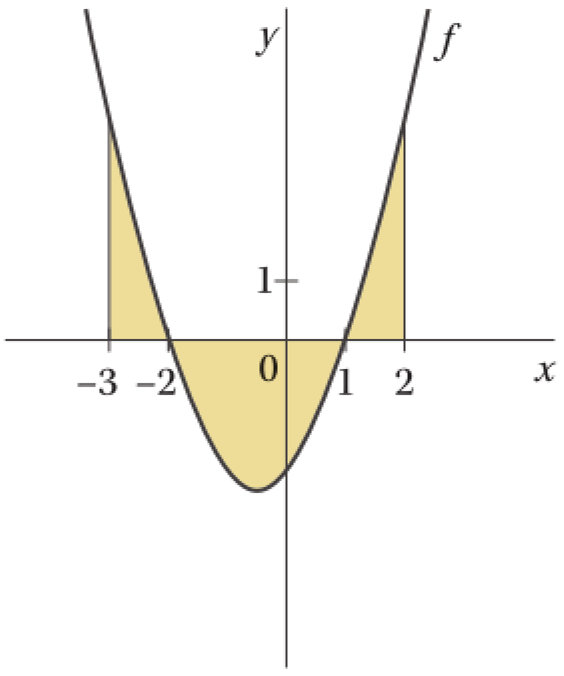
5 $\int_{0}^{5} f(x)\mathrm{d}x$



....

....

6 $\int_{-3}^{2} f(x)\mathrm{d}x$



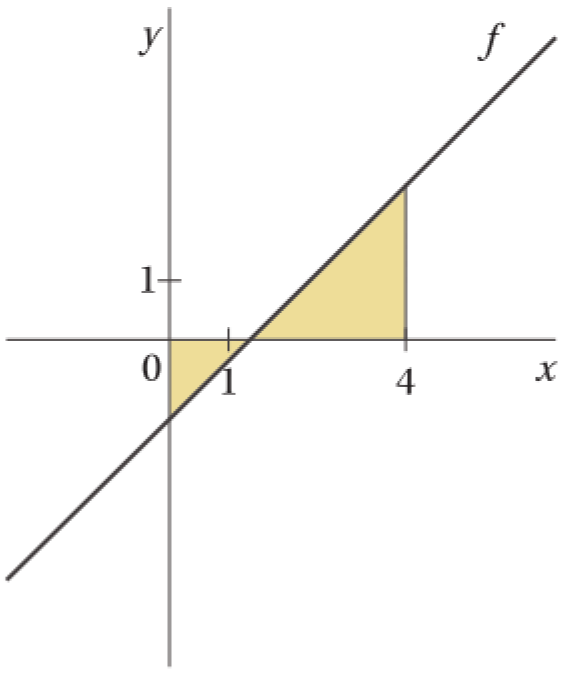
....

....

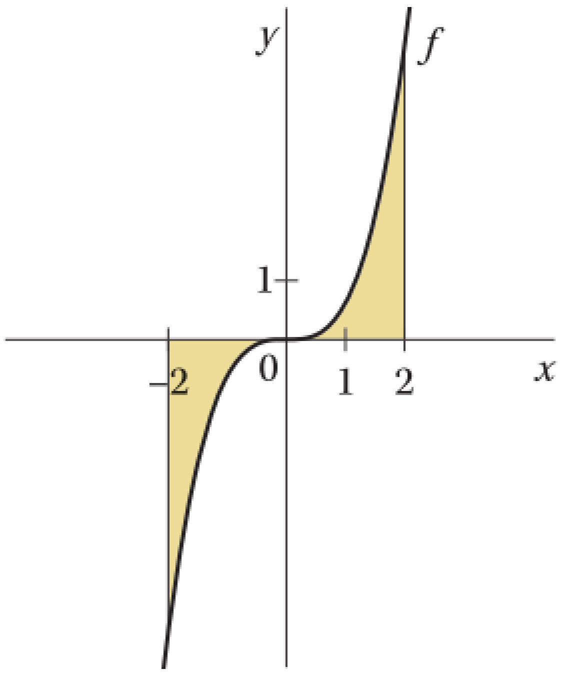
20

Bepaal het teken van de bepaalde integraal. Vul aan met >, < of =.

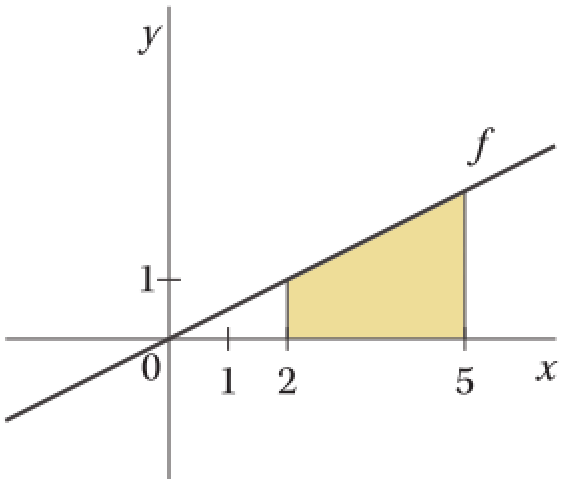
1 $\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$ 0



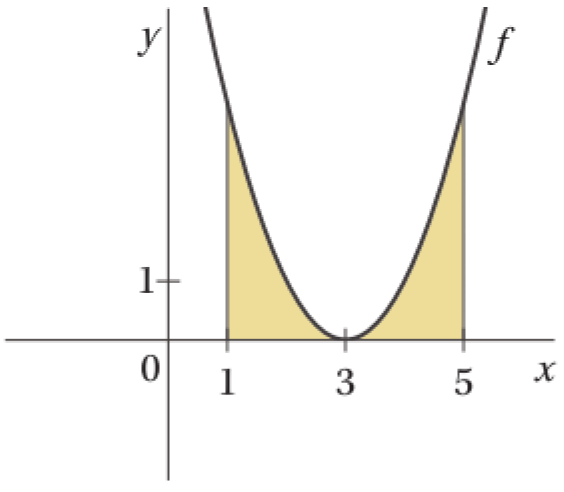
2 $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ 0



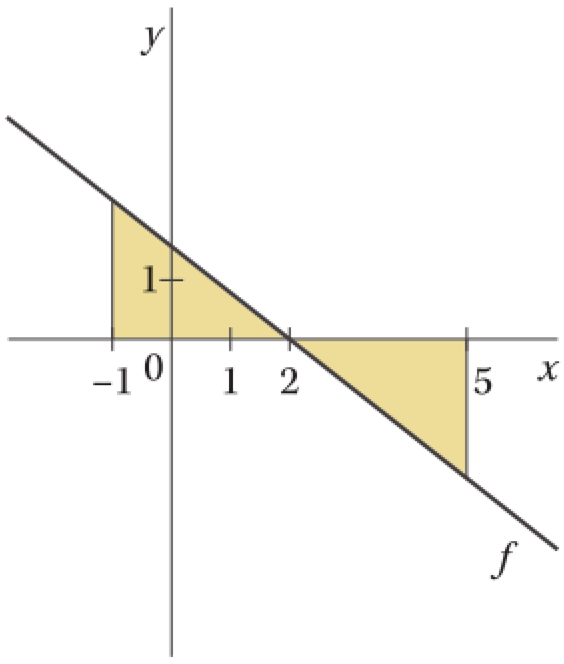
3 $\int_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ 0



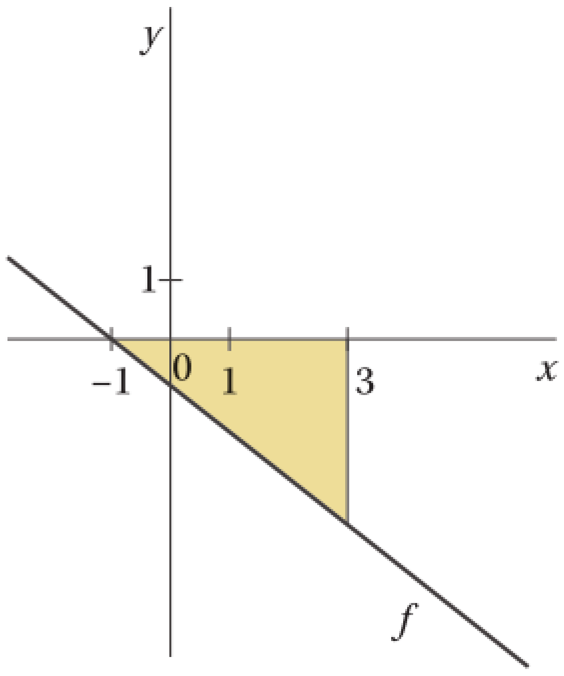
4 $\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ 0



5 $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ 0

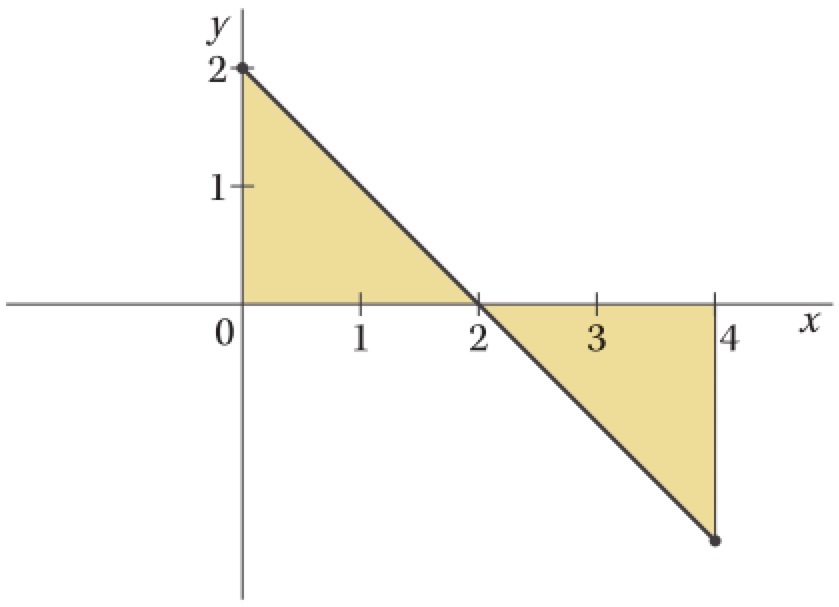


6 $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ 0



21

Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = -x + 2$ in het interval [0, 4].



1 Leid uit de grafiek de bepaalde integraal $\int_{0}^{4}(-x+2)\mathrm{d}x$ af.

....

2 Controleer het resultaat door de bepaalde integraal te berekenen met de hoofdstelling.

....

3 Bereken de oppervlakte van het gekleurde gebied.

....

....

....

....

22

Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van de functie f en de x-as over het gegeven interval.

1 $f(x) = x + 2$ $[-1, 1]$

2 $f(x) = 2x + 1$ $[-1, 3]$

3 $f(x) = -x + 4$ $[5, 7]$

4 $f(x) = x^2 - 1$ $[-2, 2]$

Rekenregels voor bepaalde integralen

Met de hoofdstelling van de integraalrekening kunnen we de volgende rekenregels aantonen.

- De bepaalde integraal van een som is de som van de bepaalde integralen.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

somregel integralen

- Bij een bepaalde integraal van een product mogen we een constante factor vooropzetten.

$$\int_a^b r\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = r\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

veelvoudregel integralen

- Bepaalde integralen met opeenvolgende grenzen van eenzelfde functie kunnen we optellen.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

optelbaarheid van integralen

- Als we de grenzen van een bepaalde integraal omwisselen, dan verandert de integraal van teken.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

grenzen omwisselen

- Een bepaalde integraal met gelijke grenzen is gelijk aan nul.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

gelijke grenzen

Voorbeelden

$$\int_1^2 (x^2-4x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (5x-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (x^2-4x+5x-x^2)\,\mathrm{d}x$$

somregel integralen

$$= \int_1^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

hoofdstelling integraalrekening

$$= \frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 1^2$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\int_0^3 (-2x^2)\,dx = -2 \cdot \int_0^3 x^2\,dx$$ **veelvoudregel integralen**

$$= -2 \cdot \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3$$ **hoofdstelling integraalrekening**

$$= -2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 0\right)$$

$$= -18$$

$$\int_1^2 x\,dx + \int_2^3 x\,dx = \int_1^3 x\,dx$$ **optelbaarheid van integralen**

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_1^3$$ **hoofdstelling integraalrekening**

$$= \frac{1}{2} \cdot (3^2 - 1^2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

$$-\int_2^0 x\,dx = \int_0^2 x\,dx$$ **grenzen omwisselen**

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$ **hoofdstelling integraalrekening**

$$= \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 0$$

$$= 2$$

$$\int_3^3 (x^2 - 1)\,dx = 0$$ **gelijke grenzen**

23

Toon de rekenregels voor bepaalde integralen aan met de hoofdstelling van de integraalrekening.

1 $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

....

....

....

....

....

2 $\int_a^b r \cdot f(x)\mathrm{d}x = r \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

3 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$

4 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

5 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

24

Pas de somregel toe om de som van integralen te schrijven met één integraalteken. Bereken deze bepaalde integraal.

1 $\int_{2}^{5}(2x^2-1)\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}(x^2+x-2)\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}(-x^2-x-3)\mathrm{d}x$

2 $\int_{-1}^{3}(-x^2+2x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{3}(3x^2-x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{3}(-x^2-1)\mathrm{d}x$

3 $\int_{-3}^{0}(-3x^2+x-2)\mathrm{d}x+\int_{-3}^{0}(2x^2-4x+4)\mathrm{d}x-\int_{-3}^{0}(x^2-3x+1)\mathrm{d}x$

4 $\int_0^5 (x^2+x-2)\,dx + \int_0^5 (x^2+2x-3)\,dx - \int_0^5 (x^2+x)\,dx$

....

....

....

....

25

Pas de veelvoudregel toe en bereken de integraal.

1 $\int_1^3 5x\,dx =$ ....

....

2 $\int_4^6 (-7)\,dx =$ ....

....

3 $\int_0^2 (-4x^2)\,dx =$ ....

....

4 $\int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^2\,dx =$ ....

....

5 $\int_{-2}^0 0{,}3x^3\,dx =$ ....

....

6 $\int_{-3}^{-1} 5x\,dx =$ ....

....

26

Pas de optelbaarheid van integralen toe om de som van integralen te schrijven met één integraalteken. Bereken deze bepaalde integraal.

1 $\int_{-5}^{-3} x\,dx + \int_{-3}^{-2} x\,dx + \int_{-2}^{7} x\,dx$

....

....

....

....

2 $\int_{1}^{3} 2x\,dx + \int_{-1}^{1} 2x\,dx + \int_{-3}^{-1} 2x\,dx$

....

....

....

....

3 $\int_{0}^{5} (x+3)\,dx + \int_{-5}^{0} (x+3)\,dx + \int_{5}^{6} (x+3)\,dx$

....

....

....

....

4 $\int_{0}^{1}(3x-2)\mathrm{d}x+\int_{4}^{5}(3x-2)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}(3x-2)\mathrm{d}x$

27

Schrijf de som van integralen met één integraalteken. Bereken deze bepaalde integraal.

1 $\int_{-1}^{2}(3x^2-5)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{2}(2x^2+4)\mathrm{d}x+\int_{2}^{6}(x^2-9)\mathrm{d}x$

2 $\int_{1}^{4}(2x^2-x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}(x^2+x)\mathrm{d}x+\int_{4}^{5}(2x^2-x)\mathrm{d}x$

3 $\int_{-2}^{1}(x+1)^2\,dx+\int_{1}^{2}(x+1)^2\,dx+\int_{-2}^{2}(x+1)\,dx$

4 $\int_{-1}^{2}x(x-2)\,dx-\int_{-1}^{3}(x+1)^2\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)\,dx$

Bepaalde integralen

We berekenen de bepaalde integraal $\int_{1}^{3}(0{,}3x^2+1)\,dx$ (zie voorbeeld pagina 64).

TEXAS INSTRUMENTS

Berekening in het rekenscherm

In het menu MATH kiezen we de optie fnInt (numerieke integraal).

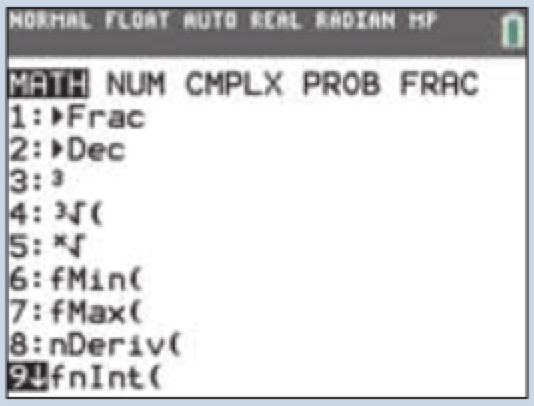
- [MATH] [9: fnInt]

We kunnen ook de sneltoets F2 gebruiken.

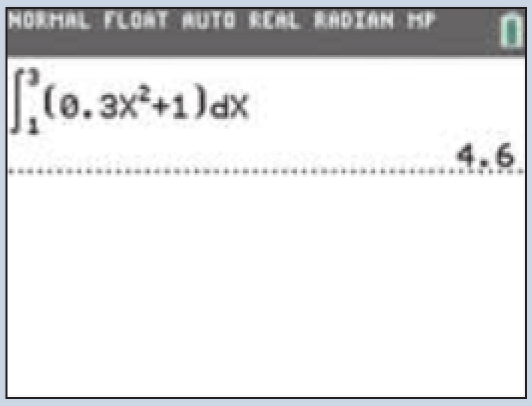
- [ALPHA] [F2] [4: fnInt]

We voeren achtereenvolgens in: de ondergrens 1, de bovengrens 3, het functievoorschrift $0{,}3x^2 + 1$ en de variabele x.

- 1 [▲] 3 [▶] $0{,}3x^2 + 1$ [▶] x [ENTER]







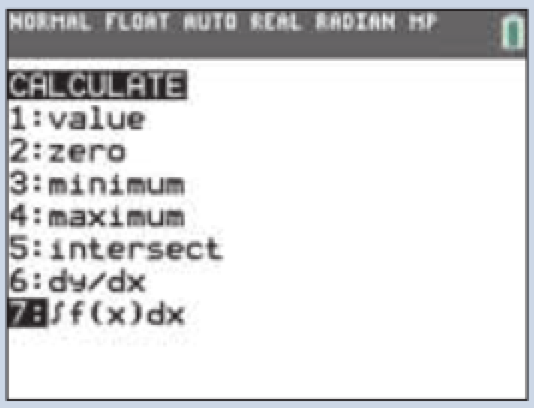
Berekening in het grafiekscherm

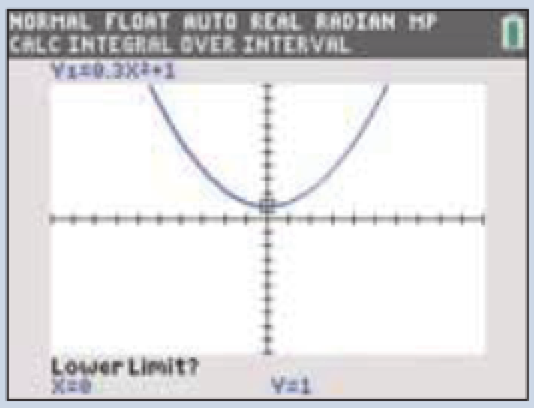
Achter de functievariabele Y1 voeren we het voorschrift $0{,}3x^2 + 1$ in. Daarna roepen we het rekenmenu CALCULATE op.

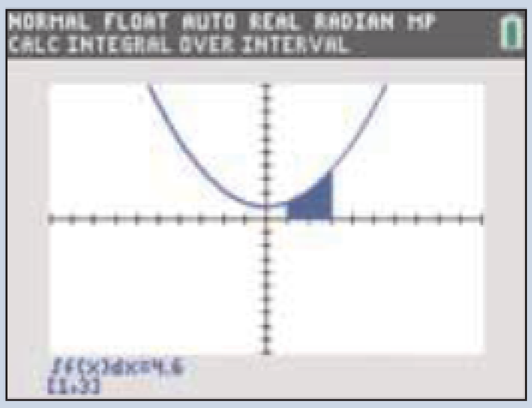
- [Y1=] $0{,}3x^2 + 1$ [2ND] [CALC]

We kiezen de optie $\int$ f(x)dx en berekenen de bepaalde integraal tussen de grenzen 1 en 3.

- [7: $\int$ f(x)dx] 1 [ENTER] 3 [ENTER]







CASIO

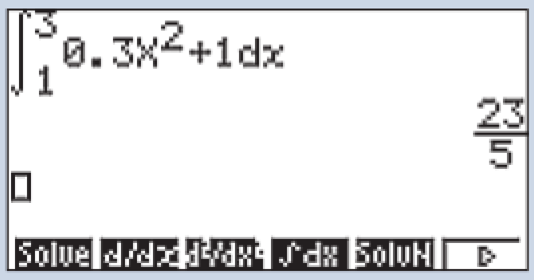
Berekening in het rekenscherm

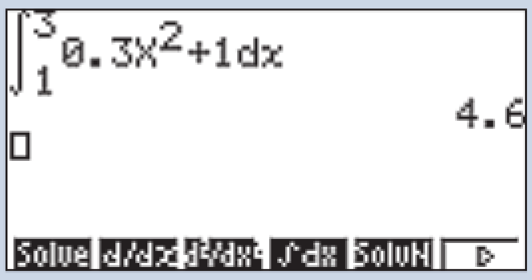
In het menu RUN·MAT roepen we het rekenmenu CALC op waarin we de optie $\int$ dx kiezen.

We voeren achtereenvolgens in: het functievoorschrift $0{,}3x^2 + 1$, de ondergrens 1 en de bovengrens 3.

- [MENU] [1: RUN·MAT] [OPTN] [F4: CALC] [F4: $\int$ dx] $0{,}3x^2 + 1$ [▼] 1 [▲] 3 [EXE] [F⌒D]







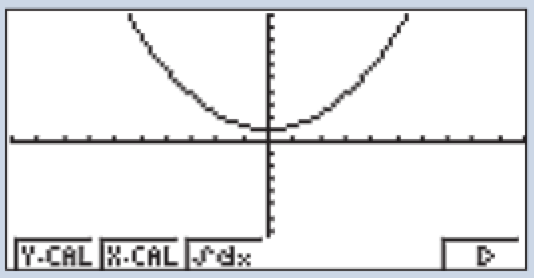
Berekening in het grafiekscherm

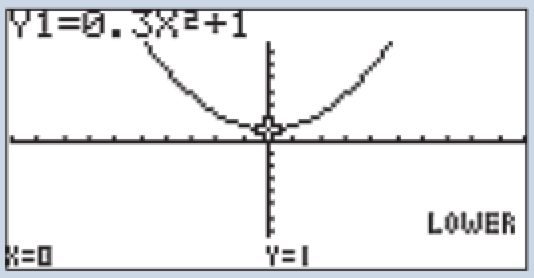
In het menu GRAPH voeren we het functievoorschrift $0{,}3x^2 + 1$ in. We tekenen de grafiek en drukken daarna de toets G-Solv om de grafiek te onderzoeken.

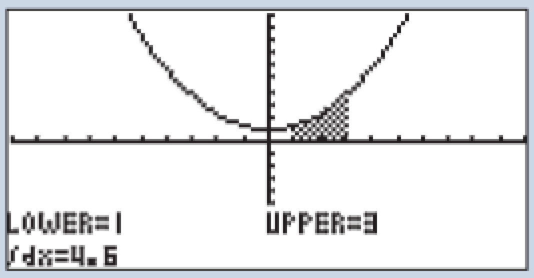
- [MENU] [3: GRAPH] $0{,}3x^2 + 1$ [EXE] [F6: Draw] [SHIFT] [G-Solv]

We kiezen de optie $\int$dx en berekenen de bepaalde integraal tussen de grenzen 1 en 3.

■ [F6: ▷] [F3: $\int$dx] 1 [EXE] 3 [EXE]







28

Bereken met ICT.

1 $\int_{3}^{5}(2{,}5x+0{,}75)\,\mathrm{d}x=$ ....

2 $\int_{-5}^{-3}(-2{,}5x-0{,}75)\,\mathrm{d}x=$ ....

3 $\int_{-2}^{2}(3x^5+2x^3-x^2)\,\mathrm{d}x=$ ....

4 $\int_{0}^{4}\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=$ ....

5 $\int_{-1}^{1}(x^6-x^5+x^3-x)\,\mathrm{d}x=$ ....

6 $\int_{-2}^{3}(4x^2-7x+3)\,\mathrm{d}x=$ ....

7 $\int_{2}^{5}(0{,}1x^3-0{,}4x^2+0{,}3)\,\mathrm{d}x=$ ....

8 $\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x=$ ....

29

Bereken de bepaalde integraal met de hoofdstelling van de integraalrekening.
Controleer met ICT.

1 $\int_{2}^{3}(6x^2-8x+4)\,\mathrm{d}x=$ ....

....

....

2 $\int_{0}^{1}(x^7-1)\,\mathrm{d}x=$ ....

....

....

3 $\int_{-2}^{0}(2x+1)(-x+3)\,\mathrm{d}x=$ ……………………………………

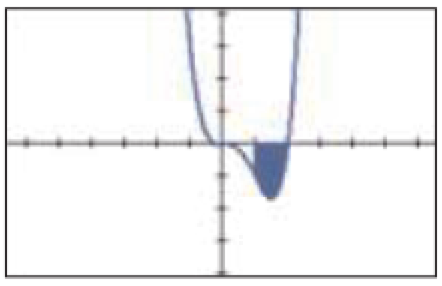
4 $\int_{-1}^{2}(-x+2)(2x+5)\,\mathrm{d}x=$ ……………………………………

30

Bereken de bepaalde integraal in het grafiekscherm en de oppervlakte A van het gekleurde gebied.

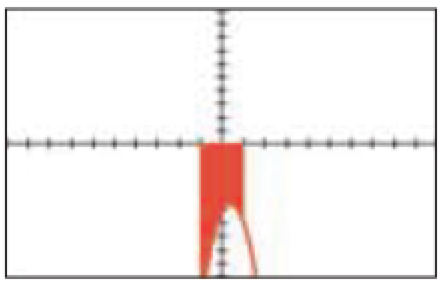
1 $\int_{1}^{2}(x^4-2x^3)\,\mathrm{d}x=$ ……………………

$A=$ ……………………



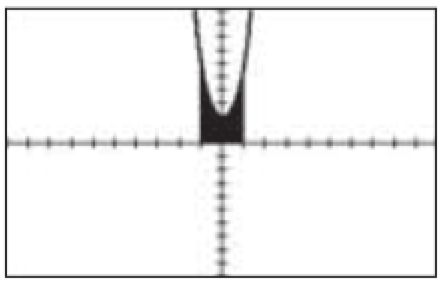
2 $\int_{-1}^{1}(-4x^2+3x-5)\,\mathrm{d}x=$ ……………………

$A=$ ……………………



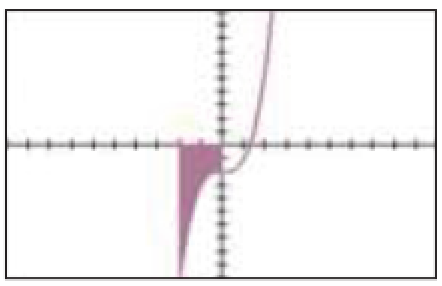
3 $\int_{-1}^{1}(x^4+3x^2+2)\,\mathrm{d}x=$ ……………………

$A=$ ……………………



4 $\int_{-2}^{0}(x^3-2)\,\mathrm{d}x=$ ……………………

$A=$ ……………………

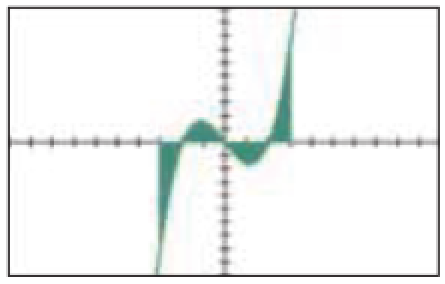


31

Bereken de bepaalde integraal in het grafiekscherm en de oppervlakte A van het gekleurde gebied.

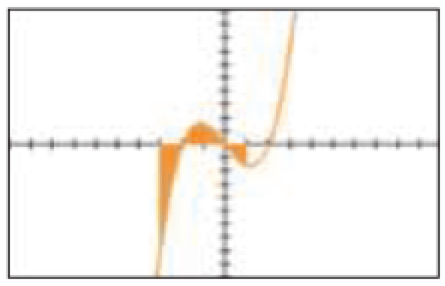
1 $\int_{-3}^{3}(0{,}5x^3 - 2x)\mathrm{d}x =$ ...

$A =$ ...



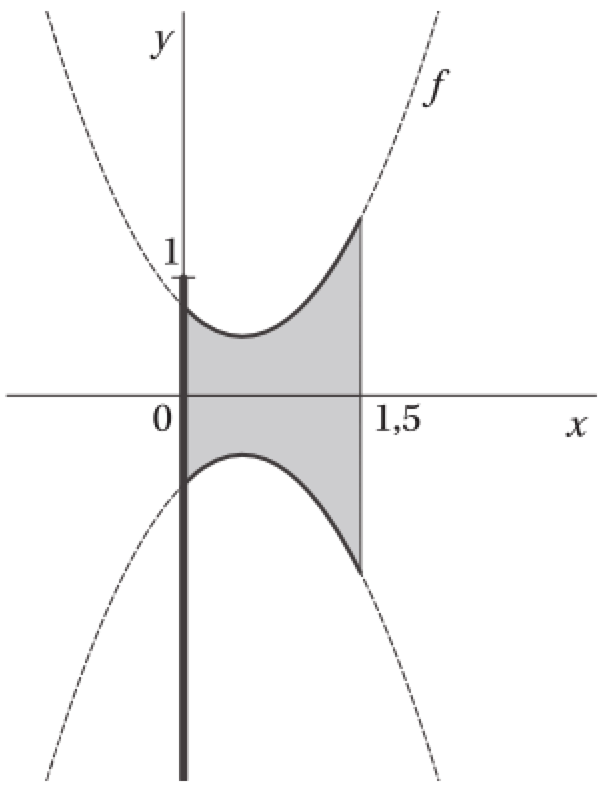
2 $\int_{-3}^{1}(0{,}5x^3 - 2x)\mathrm{d}x =$ ...

$A =$ ...



32

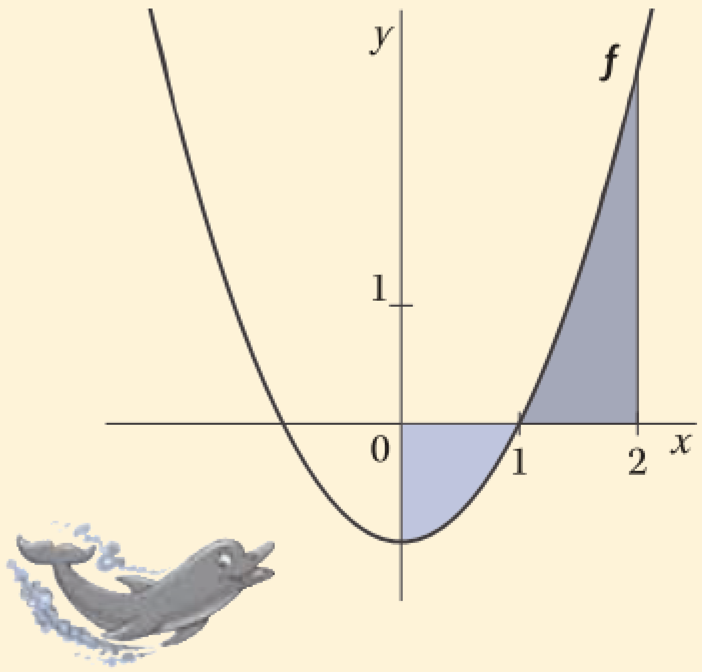
Een klassieke strijdbijl heeft een symmetrische vorm. Het blad wordt begrensd door de y-as, de rechte $x = 1{,}5$ en de grafiek van $f(x) = x^2 - x + 0{,}75$ evenals het spiegelbeeld hiervan ten opzichte van de x-as. Bereken met ICT de oppervlakte van het bijlblad.

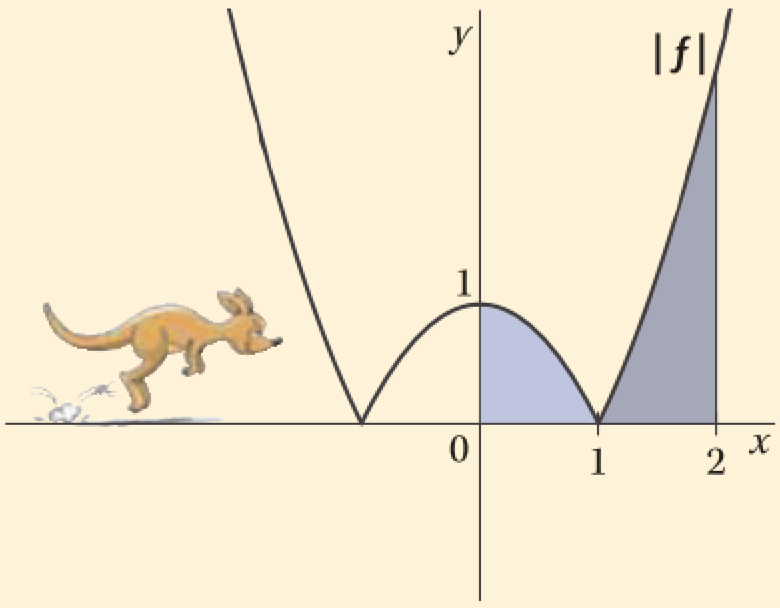




Oppervlakte berekenen met absolute waarde

Om de oppervlakte te bepalen van het gebied tussen de grafiek van $f(x) = x^2 - 1$ en de x-as over het interval [0, 2] zonder de tekentabel op te stellen (zie pagina 70), kunnen we gebruik maken van de **absolute waarde** van de functie f.





We stellen vast dat over het interval [−1, 1] de grafiek van f gespiegeld wordt om de x-as. Bijgevolg zijn de gekleurde oppervlakken over [0, 1] onder en boven de x-as even groot.

We schrijven: $A = \int_0^2 |x^2 - 1| \, dx$ **$|x^2 - 1|$ stelt de absolute waarde van $x^2 - 1$ voor**

We berekenen: $A = 2$ **ICT: $\int_0^2 |x^2 - 1| \, dx = 2$**

33

Bereken de oppervlakte A van het gebied tussen de grafiek van de functie f en de x-as over het gegeven interval. Maak gebruik van de absolute waarde van de functie f.

1 $f(x) = x^2 - 4$ [−1, 3]

$A =$ ....

2 $f(x) = x^2 + x - 2$ [−2, 2]

$A =$ ....

3 $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ [−4, 0]

$A =$ ....

4 $f(x) = -4x^2 + 4x + 3$ [1, 3]

$A =$ ....

34

Ga op een grafiek na of de bepaalde integralen gelijk, tegengesteld of geen van beide zijn.
Vul aan met = of = – of ≠.

1 $\int_1^4 \left|-x^2+1\right| \mathrm{d}x$ .... $\int_1^4 (-x^2+1)\mathrm{d}x$

2 $\int_{-1}^0 \left|x^3\right| \mathrm{d}x$ .... $\int_{-1}^0 x^3\,\mathrm{d}x$

3 $\int_{-1}^0 \left|-x^2+1\right| \mathrm{d}x$ .... $\int_{-1}^0 (-x^2+1)\mathrm{d}x$

4 $\int_2^4 \left|-x+3\right| \mathrm{d}x$ .... $\int_2^4 (-x+3)\mathrm{d}x$

5 $\int_{-1}^1 \left|-5x^2+x+10\right| \mathrm{d}x$ .... $\int_{-1}^1 (-5x^2+x+10)\mathrm{d}x$

6 $\int_0^2 \left|0{,}5x-2\right| \mathrm{d}x$ .... $\int_0^2 (0{,}5x-2)\mathrm{d}x$

35

Vul aan met = of ≠.

1 $\int_0^4 \left|-x+2\right| \mathrm{d}x$ .... $\int_0^4 (-x+2)\mathrm{d}x$

2 $\int_{-1}^2 \left|-x+2\right| \mathrm{d}x$ .... $\int_{-1}^2 (-x+2)\mathrm{d}x$

3 $\int_0^6 \left|-x+2\right| \mathrm{d}x$ .... $\left|\int_0^6 (-x+2)\mathrm{d}x\right|$

4 $\int_{-1}^2 \left|x-2\right| \mathrm{d}x$ .... $\left|\int_{-1}^2 (x-2)\mathrm{d}x\right|$

Integralen van machten

36 Instap

1 Wat is de machtregel van afgeleiden? Vul aan.

$\mathrm{D}f^n(x) =$ ....

2 Bepaal de afgeleide functies f'.

$f(x) = (2x+1)^5$ $\quad$ $f'(x) =$ ....

....

$f(x) = (-3x+2)^6$ $\quad$ $f'(x) =$ ....

....

3 Bepaal een primitieve functie F van f door k te berekenen.

$f(x) = (2x+1)^5$ $\quad$ $F(x) = k \cdot \frac{1}{6}(2x+1)^6$

....

....

....

....

....

$f(x) = (-3x+2)^6$ $\quad$ $F(x) = k \cdot \frac{1}{7}(-3x+2)^7$

....

....

....

....

....

4 Wat is het verband tussen k in het functievoorschrift van F en de coëfficiënt van x in het grondtal van het functievoorschrift van f?

....

Integralen van machten van eerstegraadsfuncties

Alle primitieve functies van $f(x) = (ax + b)^n$ kunnen we bepalen met de **machtregel** van integralen:

$$\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (ax+b)^{n+1} + c$$

Om aan te tonen dat $F(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (ax+b)^{n+1}$ een primitieve functie is van $f(x) = (ax+b)^n$ berekenen we de afgeleide van F:

$$\mathrm{D}F(x) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (ax+b)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \mathrm{D}(ax+b)^{n+1}$$ veelvoudregel afgeleiden

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot (ax+b)^n \cdot \mathrm{D}(ax+b)$$ machtregel afgeleiden

$$= \frac{1}{a} \cdot (ax+b)^n \cdot a$$

$$= (ax+b)^n$$

$$= f(x)$$

Voorbeelden

$$\int (5x-1)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot (5x-1)^4 + c$$ machtregel integralen

$$= \frac{1}{20} \cdot (5x-1)^4 + c$$

$$\int_0^4 (-x+1)^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-x+1)^3\right]_0^4$$ hoofdstelling integraalrekening

$$= -\frac{1}{3} \cdot \left[(-x+1)^3\right]_0^4$$

$$= -\frac{1}{3}\left((-4+1)^3 - (0+1)^3\right)$$

$$= -\frac{1}{3}(-27-1)$$

$$= \frac{28}{3} = 9{,}33...$$

37

Bereken de onbepaalde integraal.

1 $\int (4x-1)^2 \, dx =$ ....

2 $\int (-3x+2)^5 \, dx =$ ....

3 $\int (5x+8)^2 \, dx =$ ....

4 $\int (-x+2)^3 \, dx =$ ....

38

Bereken de bepaalde integraal. Controleer met ICT.

1 $\int_2^3 (2x-3)^4 \, dx =$ ....

....

....

2 $\int_0^1 (3x-2)^7 \, dx =$ ....

....

....

3 $\int_0^4 (2x-5)^3 \, dx =$ ....

....

....

4 $\int_{-5}^5 (-x+2)^2 \, dx =$ ....

....

....

39

Bereken op twee manieren:

a met de machtregel van integralen.

b door de macht eerst uit te werken.

1 a $\int_{-1}^{1}(2x+5)^2\,dx =$ ....

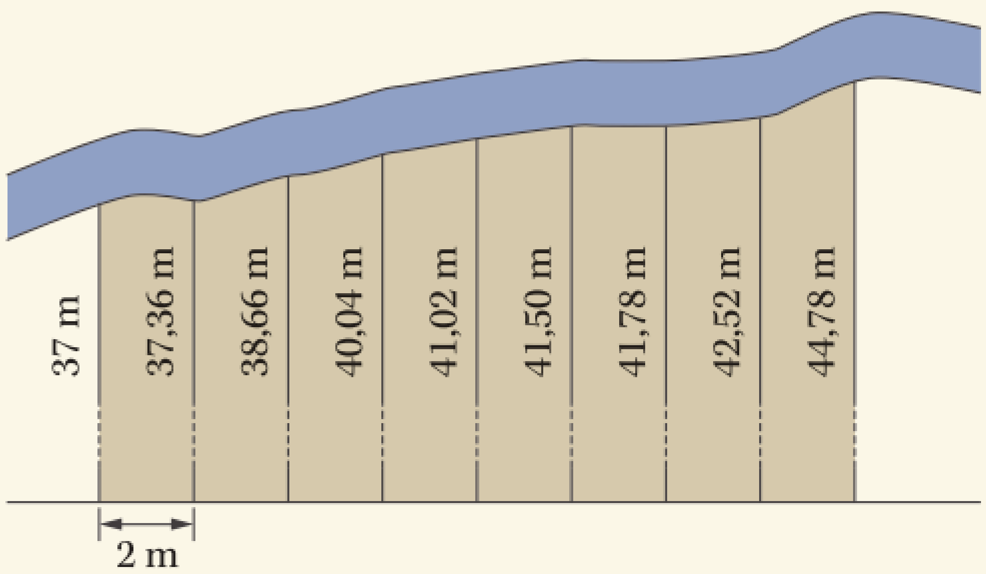
b $\int_{-1}^{1}(2x+5)^2\,dx =$ ....

2 a $\int_{0}^{2}(x+1)^3\,dx =$ ....

b $\int_{0}^{2}(x+1)^3\,dx =$ ....

Uitdagingen

1 Een bouwgrond wordt langs één zijde begrensd door een kronkelende beek. Om de 2 meter wordt de breedte van het perceel gemeten, zoals aangegeven op de figuur.

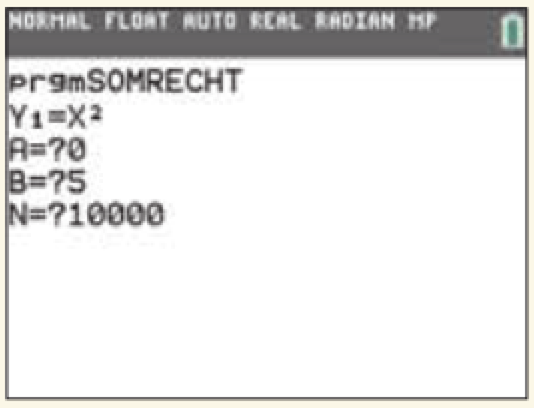


1 Bereken een benaderende waarde te klein en een benaderende waarde te groot voor de oppervlakte van het perceel.

2 Schat met behulp van de vorige twee benaderingen de oppervlakte van het perceel.

2 We kunnen de oppervlakte A van het gebied tussen de grafiek van $f(x) = 0{,}01x^3$ en de x-as over het interval [0, 1] benaderen met 50 rechthoeken met gelijke breedte waarvan de rechterbovenhoeken op de grafiek van f liggen. Bepaal het verschil tussen deze benadering en de oppervlakte A.

3 1 Schrijf voor de grafische rekenmachine een programma voor het sommeren van n rechthoeken waarvan de rechterbovenhoek op de grafiek van f ligt.



2 Bereken hiermee de benaderende oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as over het interval $[a, b]$ voor n rechthoeken.

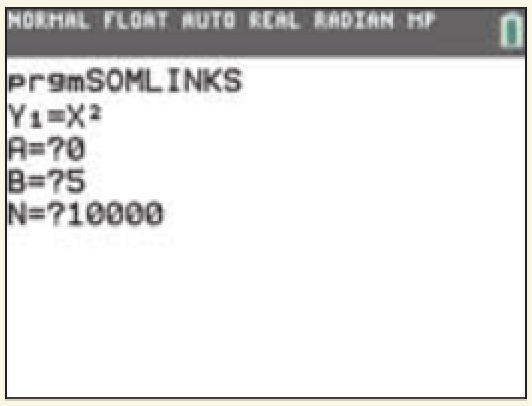
a $f(x) = x^2$ $[a, b] = [0, 5]$ $n = 10\,000$

b $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$ $[a, b] = [0, 4]$ $n = 100$

c $f(x) = -0{,}1x^2 + 4$ $[a, b] = [1, 6]$ $n = 1000$

4

1 Schrijf voor de grafische rekenmachine een programma voor het sommeren van n rechthoeken waarvan de linkerbovenhoek op de grafiek van f ligt.



2 Bereken hiermee de benaderende oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as over het interval $[a, b]$ voor n rechthoeken.

a $f(x) = x^2$ $\quad [a, b] = [0, 5] \quad n = 10\,000$

b $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$ $\quad [a, b] = [0, 4] \quad n = 100$

c $f(x) = -0{,}1x^2 + 4$ $\quad [a, b] = [1, 6] \quad n = 1000$

5 Los de vergelijking in de onbekende a op.

1 $\int_a^5 x^4\,dx = 625$ **2** $\int_0^1 ax^2\,dx = 3$ **3** $\int_{-1}^2 (x^2 + a)\,dx = 12$

6 Tijdens een griepepidemie kunnen we het aantal ziektegevallen per dag beschrijven met de functie:

$$f(n) = 25n^2 - n^3$$

n: dagnummer van 1 tot en met 25

$f(n)$: aantal nieuwe ziektegevallen op de n-de dag

1 Bereken met ICT $\sum_{n=1}^{25} f(n)$ en $\int_1^{25} f(n)\,dn$.

2 Hoe kunnen we verklaren dat het aantal patiënten tijdens deze griepepidemie gelijk is aan de som $\sum_{n=1}^{25} f(n)$ en dat de bepaalde integraal $\int_1^{25} f(n)\,dn$ slechts een benaderende waarde voor dit aantal is?

7 Teken een grafiek en bepaal de integraal.

1 $\int_{-a}^{a} mx\,dx$ **2** $\int_{-a}^{a} q\,dx$

8 Schrijf de som van integralen met één integraalteken. Bereken deze bepaalde integraal.

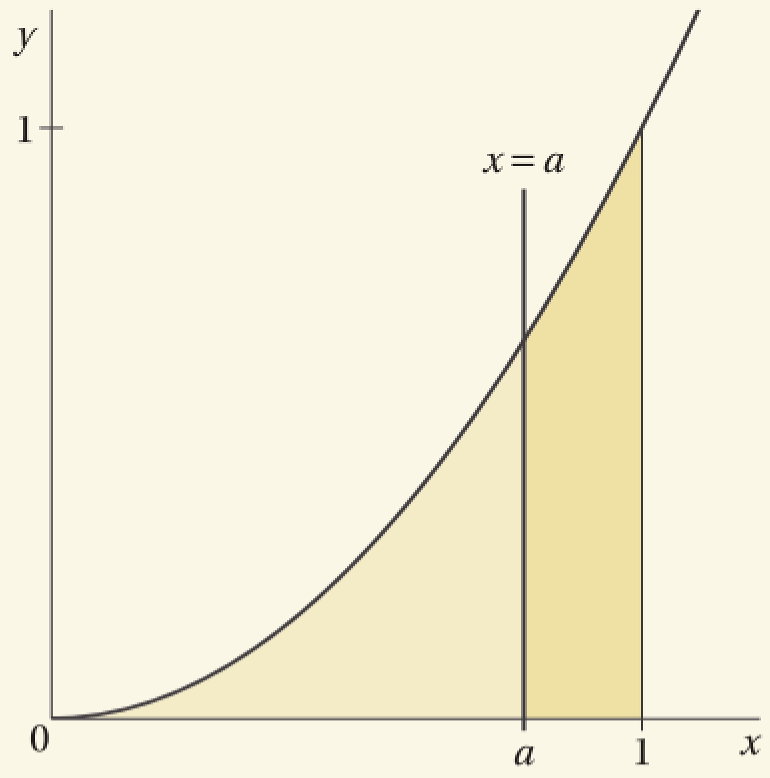
1. $\int_0^1 (x+1)(x-1)\,dx + \int_1^0 (x+2)(x-2)\,dx + \int_1^2 3\,dx$
2. $\int_0^5 (x+3)^2\,dx - \int_{10}^5 6x\,dx + \int_5^0 (x^2+9)\,dx$
3. $\int_1^3 x(x+1)\,dx - \int_3^4 (-x^2+1)\,dx + \int_3^1 (x+1)\,dx$
4. $\int_2^1 x(x+5)\,dx + \int_1^2 (5x+5)\,dx - \int_2^3 (x^2-5)\,dx$

9 Bereken $\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx + \int_3^4 (x-3)\,dx + \int_4^5 (x-4)\,dx + \int_5^6 (x-5)\,dx$.

10 Voor welke waarden van b is $\int_0^b (bx+b)\,dx$ gelijk aan nul?

Controleer het antwoord met een grafische voorstelling.

11 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ in het interval [0, 1]. De rechte $x = a$ verdeelt het gekleurde oppervlak in twee gelijke delen.

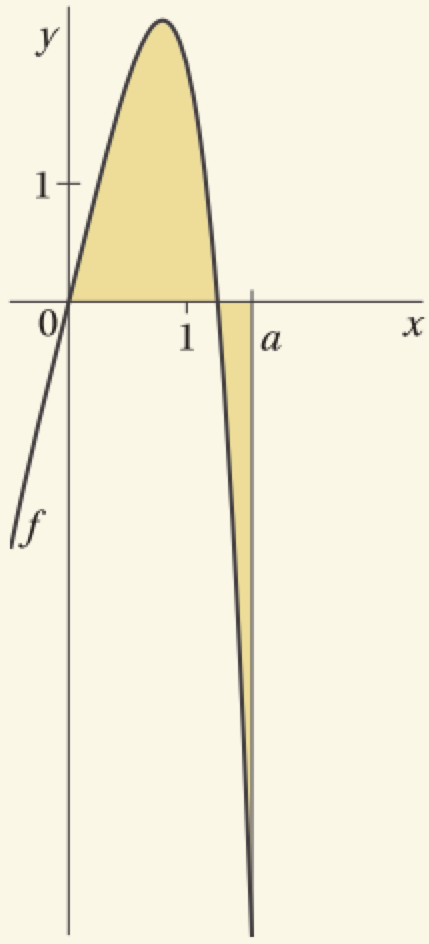


Welke waarde heeft a?

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

12 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = -2x^4 + 4x$.

1 Voor welke waarde van a is het gekleurde oppervlak boven de x-as even groot als het gekleurde oppervlak onder de x-as?



2 Bereken met ICT de oppervlakte A van elk gekleurd deel.

13 Los de vergelijking in de onbekende a op.

1 $\int_{a-1}^{a+1} (2x+3)\,dx = 10$

2 $\int_{a}^{a+2} (3x-1)\,dx = 5$

3 $\int_{a}^{2} dx - 5\int_{a}^{1} dx = 1$

4 $3\int_{-1}^{a} x^2\,dx = 2\int_{a}^{1} x\,dx$

14 1 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - c$ en $c > 0$

Voor welke waarde van c geldt: $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx$?

2 $f(x) = -x^2 + c$ en $c > 0$

Voor welke waarde van c geldt: $\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} f(x)\,dx = \frac{9}{2}$?

3 $f(x) = -x^2 + cx$ en $c > 0$

Voor welke waarde van c geldt: $\int_0^4 f(x)\,dx = 9 \cdot \int_0^1 f(x)\,dx$?

4 $f(x) = (x-c)^2$ en $c > 0$

Voor welke waarde van c geldt: $\int_0^4 f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^c f(x)\,dx$?

15 Bereken met ICT de oppervlakte ingesloten door de grafiek van de functie f, de x-as en de verticale rechten door het minimum en het maximum van de functie.

1 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$

2 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$

16 Een aardappelteler brengt zijn nieuwe oogst naar een groothandelaar waar de aardappelen in een sorteerautomaat geworpen worden. De sorteerautomaat staat in verbinding met een computer zodat de groothandelaar op elk moment precies weet hoeveel procent 'grote' en hoeveel procent 'kleine' aardappelen er zijn.

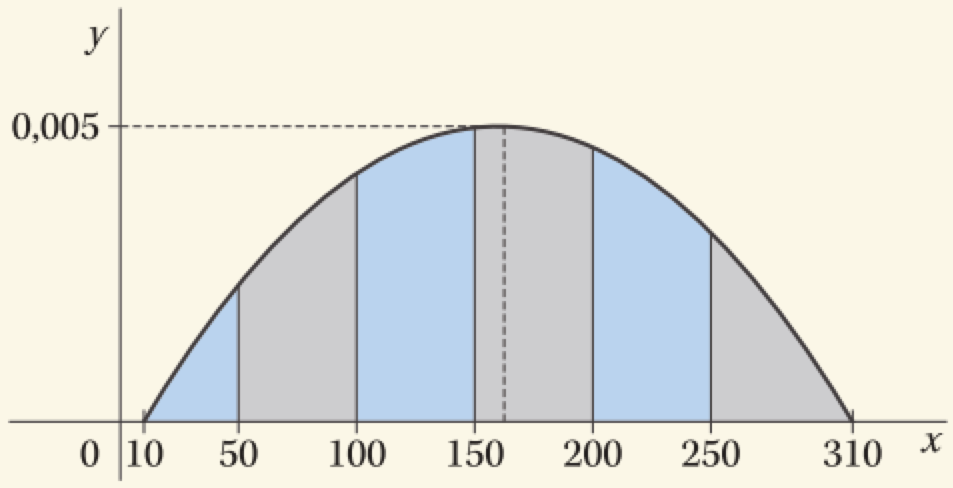
De computer zet alle meetresultaten om in een verdelingsfunctie:

$$f(x) = \frac{1}{4\,500\,000}(-x^2 + 320x - 3100)$$

Hierin stelt x de massa voor van één aardappel. Uit de verdelingsfunctie kan afgelezen worden hoeveel procent van de gewogen aardappelen een massa heeft tussen a en b gram.

Dit percentage wordt gegeven door de integraal $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.





Bereken met ICT het percentage aardappelen dat bij elke gewichtsklasse hoort.

17 Bereken met ICT de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van de functie f en de x-as over het gegeven interval.

1 $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ $[4, 6]$

2 $f(x) = (2x - 1)^3$ $[0, 1]$

18 Rangschik de uitdrukkingen van groot naar klein zonder de integralen te berekenen.

(A) $\int_{-3}^{2} x^3\,\mathrm{d}x$

(B) $\int_{-3}^{2} |x^3|\,\mathrm{d}x$

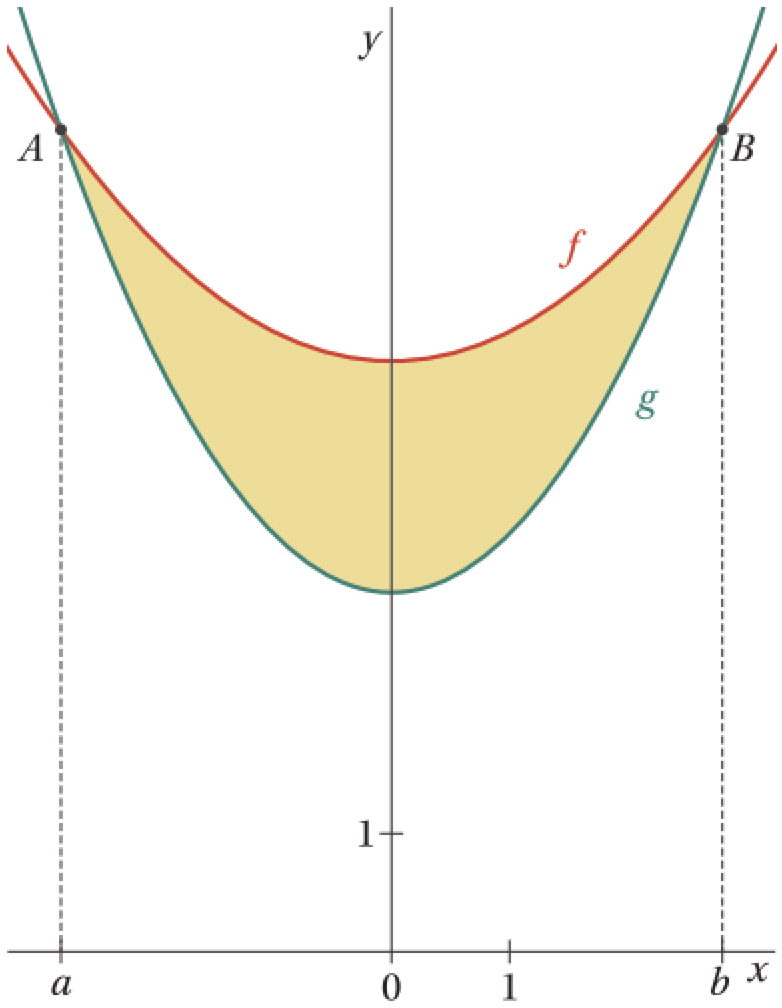
(C) $\left|\int_{-3}^{2} x^3\,\mathrm{d}x\right|$

2.2 Toepassingen

Oppervlakte tussen grafieken

1 **Instap**

Gegeven zijn de functies $f(x) = 0{,}25x^2 + 5$ en $g(x) = 0{,}5x^2 + 3{,}04$. De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B.



1 Bereken met ICT de x-coördinaten a en b van de snijpunten A en B.

....

2 Bereken met ICT de bepaalde integralen.

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ ....

$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x =$ ....

3 Wat is de oppervlakte van het maantje ingesloten door de grafieken van de functies f en g?

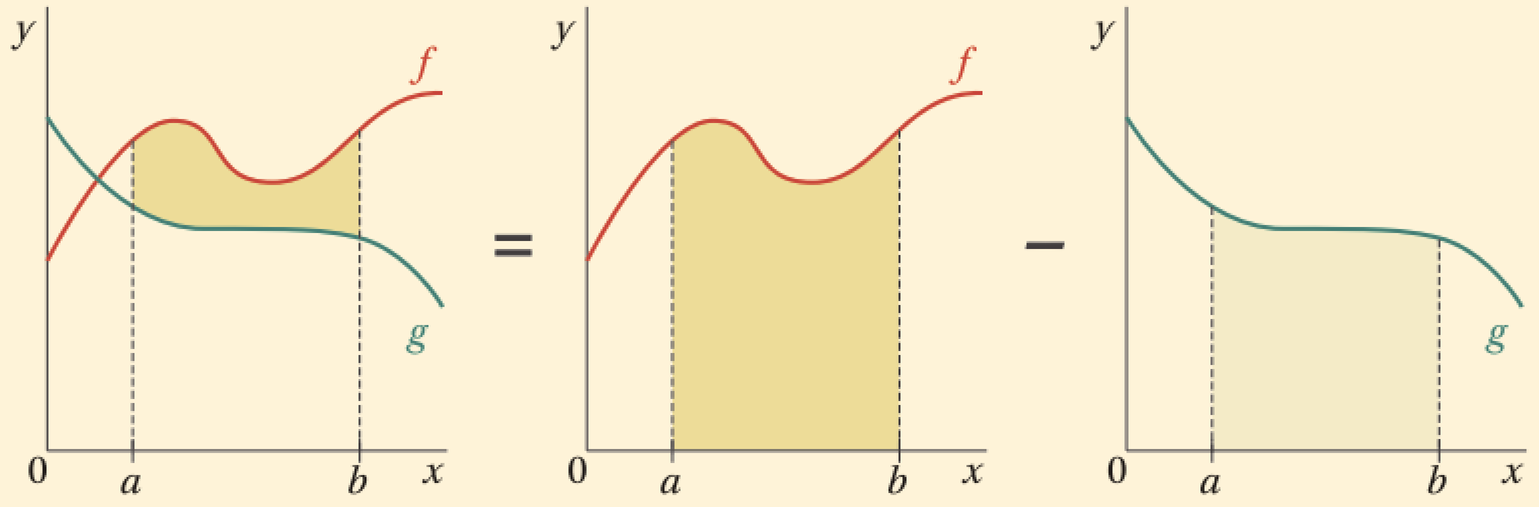
....

4 Hoe kunnen we deze oppervlakte met integralen noteren?

....

Oppervlakte tussen de grafieken van twee functies

De oppervlakte van het gebied tussen de grafieken van de functies f en g over het interval $[a, b]$ kunnen we beschouwen als een verschil van twee oppervlakten.



We schrijven:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{somregel integralen}$$

Als de grafiek van f boven de grafiek van g ligt in het interval $[a, b]$, dan is de oppervlakte van het gebied tussen de grafieken van f en g over het interval $[a, b]$ gelijk aan:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x} \qquad \text{grafiek } f \text{ ligt boven grafiek } g \text{ in } [a, b]$$

Voorbeeld

We berekenen algebraïsch de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = x^3 - x^2$ en $g(x) = 2x$.

Eerst berekenen we de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

$f(x) = g(x)$

$f(x) - g(x) = 0$

$x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

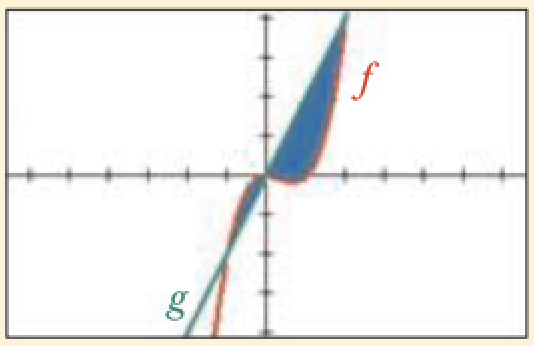
$x = 0$ of $x^2 - x - 2 = 0$

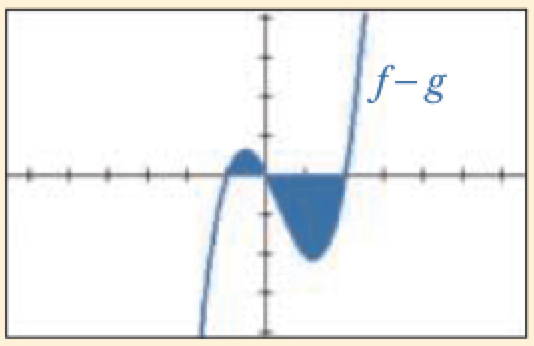
$x = 0$ $\quad x = -1$ of $x = 2$ $\qquad$ tweedegraadsvergelijking oplossen

Daarna maken we de tekentabel van $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

x		-1		0		2	
$f(x) - g(x)$	–	0	+	0	–	0	+

Ter controle tekenen we met ICT de grafieken van f, g en $f-g$.





Om de gevraagde oppervlakte te berekenen, splitsen we het interval [−1, 2] op in het interval [−1, 0] waarin $f(x)-g(x)$ positief is (grafiek van f ligt boven grafiek van g) en het interval [0, 2] waarin $f(x)-g(x)$ negatief is (grafiek van f ligt onder grafiek van g).

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))\,dx-\int_{0}^{2}(f(x)-g(x))\,dx\\
&= \int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx-\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)\,dx\\
&= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{2}\\
&= \left(0-\left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-(-1)^2\right)\right)-\left(\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4-\frac{1}{3}\cdot 2^3-2^2\right)-0\right)\\
&= -\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)-\left(4-\frac{8}{3}-4\right)=-\left(\frac{3}{12}+\frac{4}{12}-\frac{12}{12}\right)+\frac{8}{3}=\frac{5}{12}+\frac{32}{12}=\frac{37}{12}=3{,}083...
\end{aligned}$$

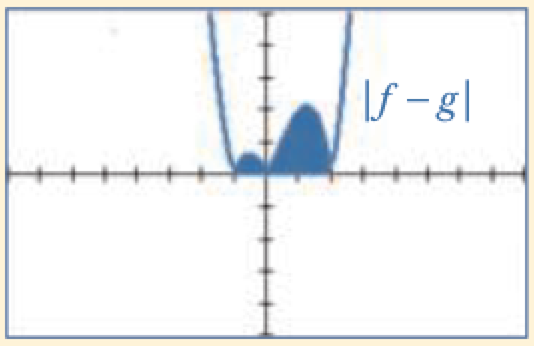
Merk op

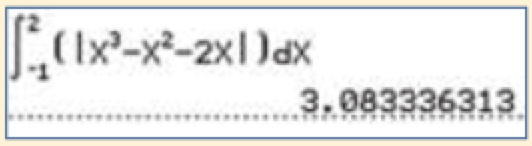
We kunnen de gevraagde oppervlakte ook berekenen door gebruik te maken van de absolute waarde van de verschilfunctie $f-g$ over het interval [−1, 2].

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2}|f(x)-g(x)|\,dx\\
&= \int_{-1}^{2}|x^3-x^2-2x|\,dx\\
&= 3{,}083...
\end{aligned}$$

$|f(x)-g(x)|$ stelt de absolute waarde van $f(x)-g(x)$ voor

ICT: bepaalde integralen

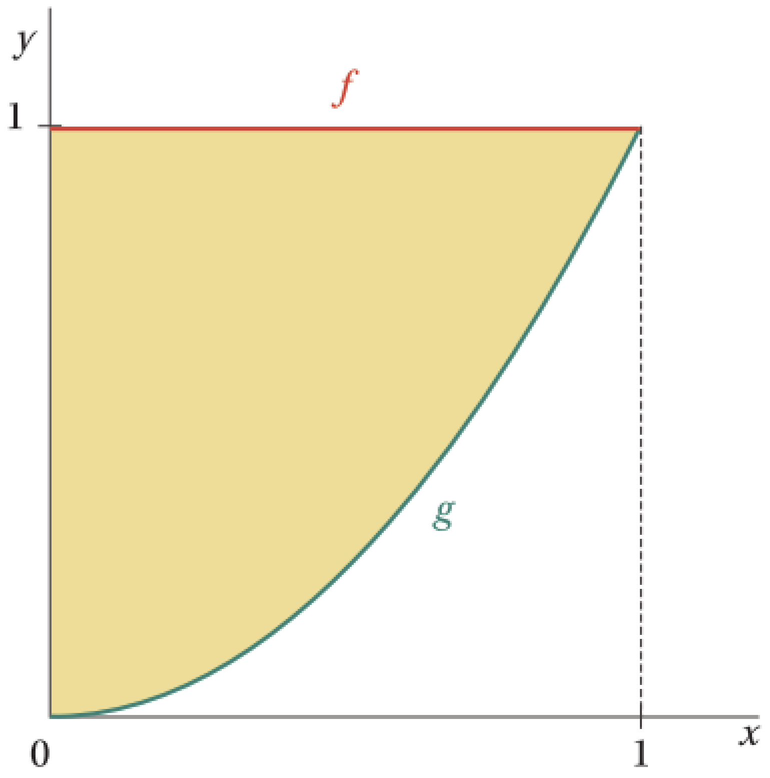




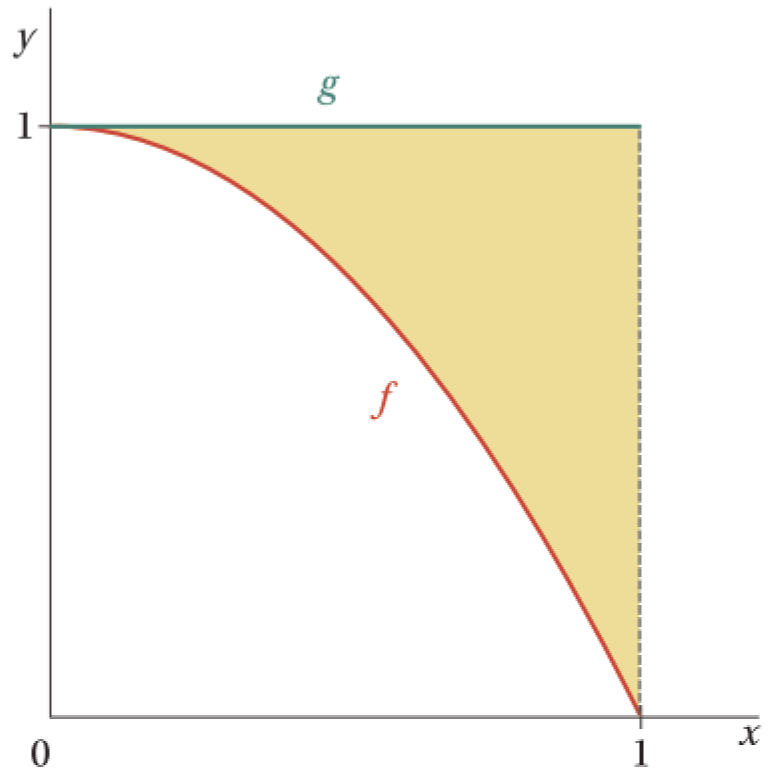
2

Bereken zonder ICT de oppervlakte van het gekleurde gebied tussen de grafieken van de functies f en g.

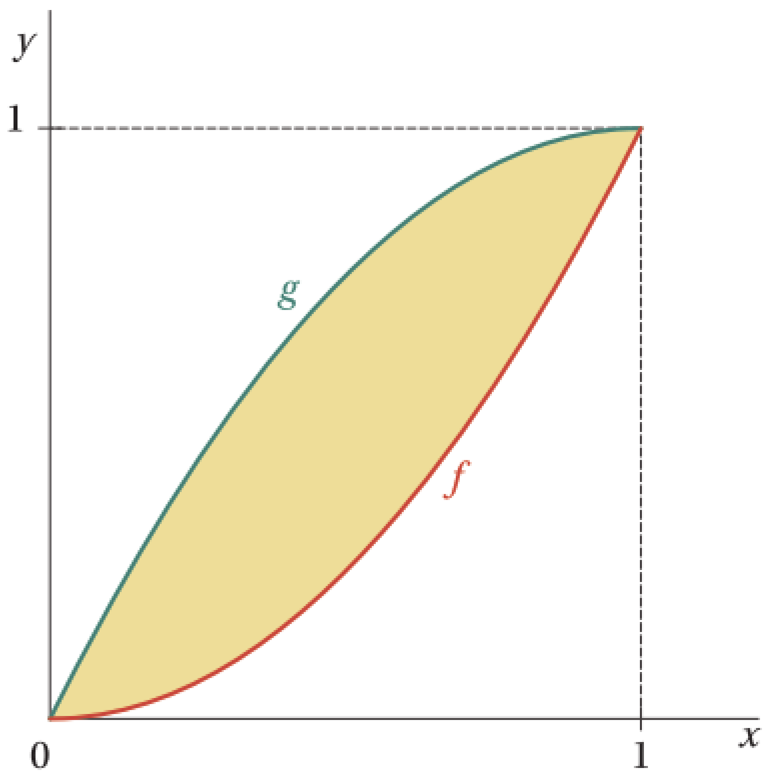
1 $f(x) = 1$ en $g(x) = x^2$



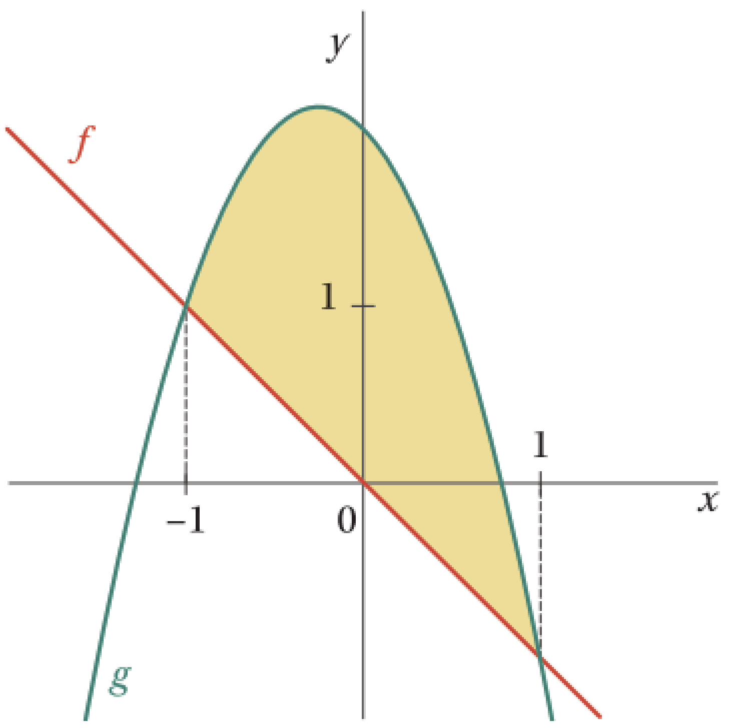
2 $f(x) = -x^2 + 1$ en $g(x) = 1$



3 $f(x) = x^2$ en $g(x) = -x^2 + 2x$



4 $f(x) = -x$ en $g(x) = -2x^2 - x + 2$



....

....

....

....

....

....

3

Bereken zonder ICT de oppervlakte van de gebieden ingesloten door de grafieken van de functies f en g.

1 $f(x) = x^2 - 4$ en $g(x) = 2x - 1$

x-coördinaten van de snijpunten

$f(x) - g(x) = 0$

....

....

....

....

Tekentabel van $f(x) - g(x) =$ ....

x	
$f(x) - g(x)$	

Ingesloten oppervlakte

....

....

....

....

2 $f(x) = x^2 - 3x$ en $g(x) = -4x + 2$

3 $f(x) = -0{,}5x^2 + 2$ en $g(x) = 0{,}5x^2 - 2$

4 $f(x) = x^2 - 5x + 2$ en $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

4

Bereken met ICT de oppervlakte tussen de grafieken van f en g over het interval $[a, b]$.

1 $f(x) = 0{,}25x^3 - 0{,}75x^2 + 5$ $g(x) = 5 - 2{,}5x$ $[-2, 2]$

$A =$

2 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ $g(x) = -x + 2$ $[-1, 2]$

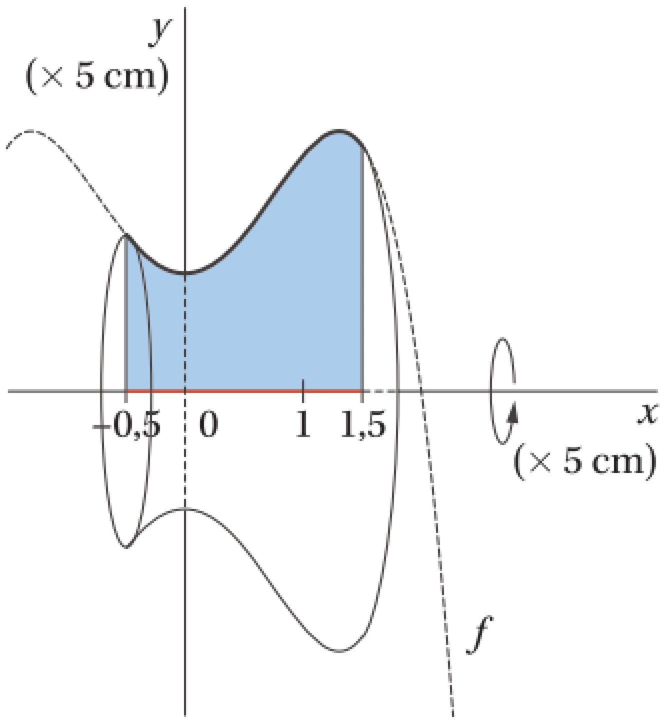
$A =$

Volume van omwentelingslichamen

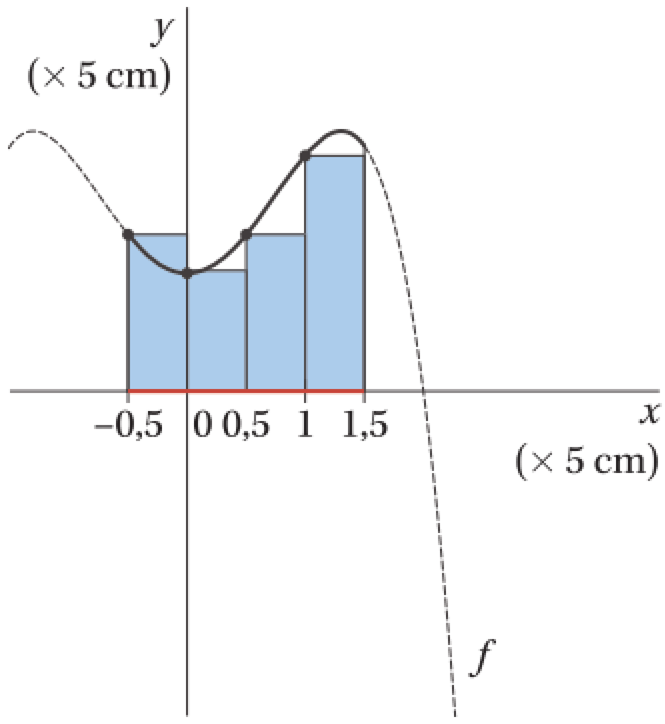
5 Instap

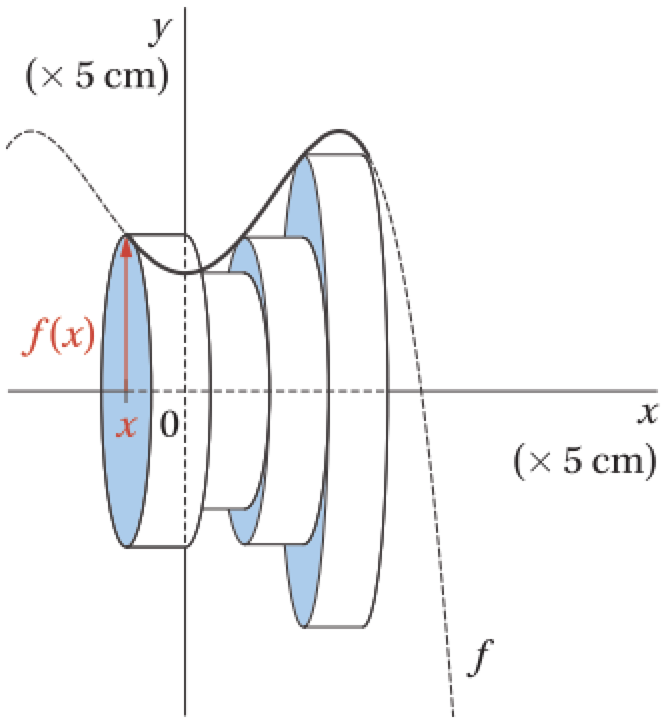
Een bloemenvaasje is zo ontworpen dat de vorm verkregen wordt door de grafiek van $f(x) = -\frac{5}{12}x^4 + \frac{17}{12}x^2 + 1$ tussen de grenzen $-0,5$ en $1,5$ te laten wentelen om de x-as.





De inhoud van dit vaasje kunnen we benaderen door het interval $[-0,5\,;\,1,5]$ te verdelen in 4 gelijke delen. Hierop construeren we 4 rechthoeken zodat de linkerbovenhoeken op de kromme met voorschrift $f(x) = -\frac{5}{12}x^4 + \frac{17}{12}x^2 + 1$ liggen.





Bij een wenteling beschrijft elk van deze rechthoeken een cilinder. De som van de inhouden van deze cilinders is een benadering van de inhoud van het bloemenvaasje.

1 Wat is de hoogte h in cm van elke cilinder?

....

2 Wat is de straal in cm van elke cilinder? Rond af op 1 decimaal.

....

....

....

3 Bereken de som V van de inhouden van deze 4 cilinders in cm³.

....

....

....

4 Geef een benadering voor de inhoud van het vaasje in liter. Rond af op 2 decimalen.

....

....

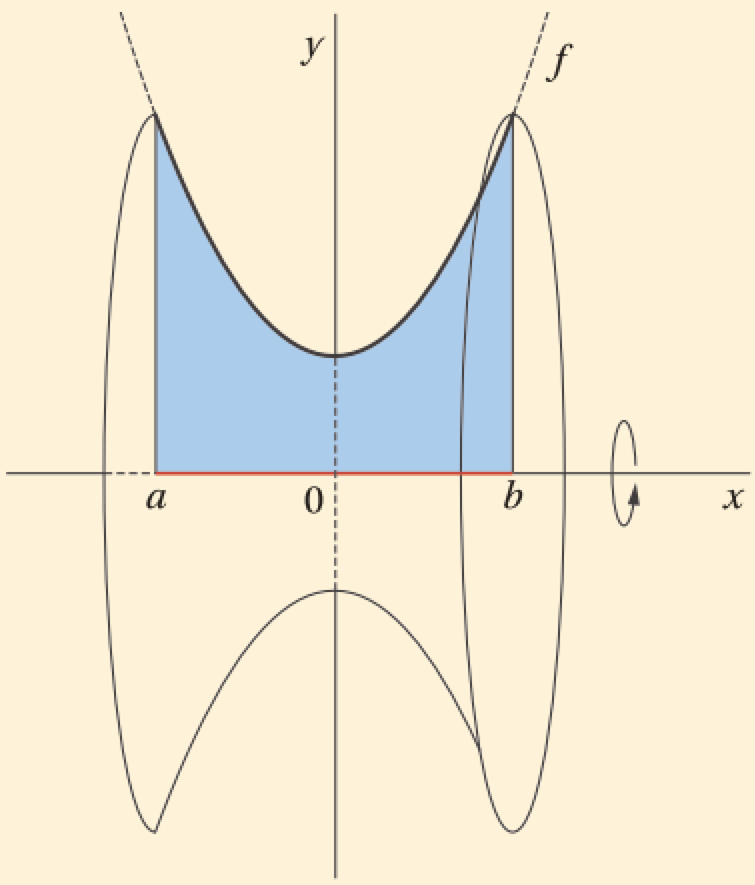
5 Hoe kunnen we de inhoud van het bloemenvaasje nog nauwkeuriger benaderen?

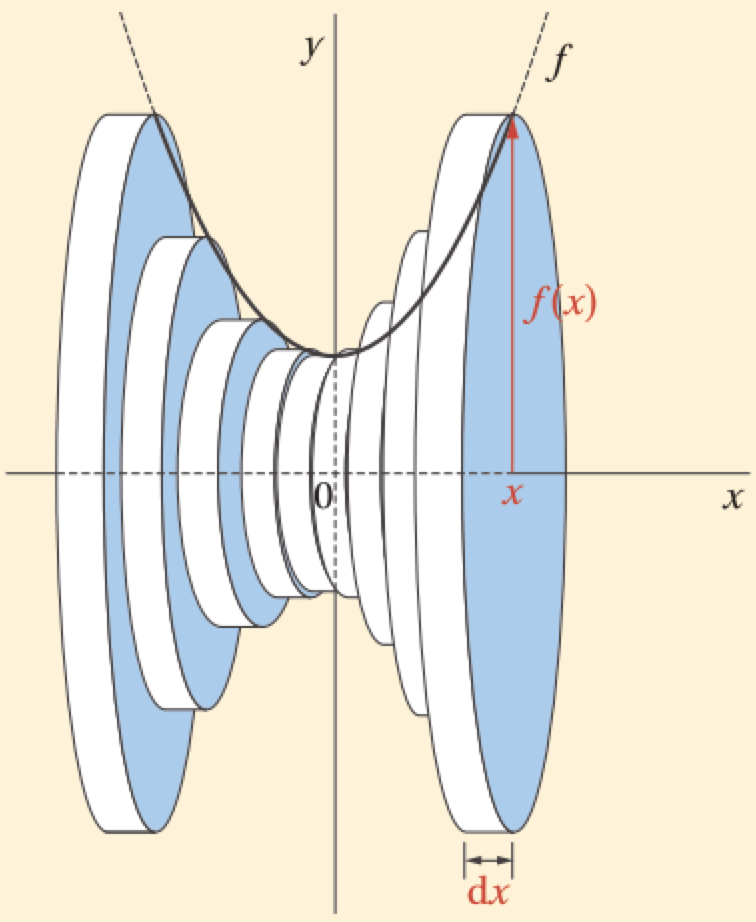
....

....

Volume van omwentelingslichamen

Een lichaam dat ontstaat door het gebied tussen de grafiek van een functie f en de x-as over een interval $[a, b]$ te wentelen om de x-as, noemen we een **omwentelingslichaam**. Om het volume van een omwentelingslichaam te berekenen, verdelen we het lichaam in smalle schijfjes.





De dikte van een schijfje noteren we met dx, de straal van het grondvlak met $f(x)$. Het volume van één schijfje noteren we met het symbool dV en berekenen we met de volumeformule voor cilinders:

$\mathrm{d}V = \pi f^2(x)\mathrm{d}x$ **volume cilinder: $V = \pi r^2 h$** **$r = f(x)$** **$h = \mathrm{d}x$**

Het volume van het omwentelingslichaam berekenen we door de volumes van de schijfjes op te tellen. Als het aantal onderverdelingen naar oneindig gaat, dan benaderen we het juiste volume.

De som van de volumes van oneindig veel smalle deelschijfjes stellen we voor met de volgende integraal:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Voorbeeld

We berekenen de inhoud van het bloemenvaasje uit de instap.

$$V = \pi \int_{-0,5}^{1,5} \left(-\frac{5}{12}x^4 + \frac{17}{12}x^2 + 1\right)^2 dx$$

$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

$a = -0,5$ $b = 1,5$ $f(x) = -\frac{5}{12}x^4 + \frac{17}{12}x^2 + 1$

$= 15,563...$

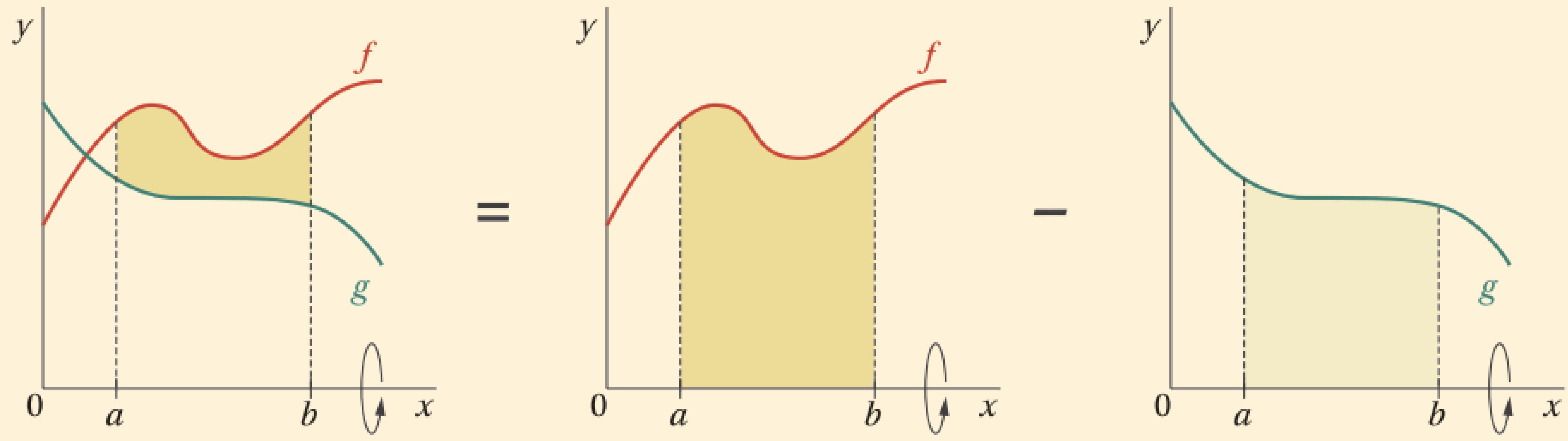
ICT: bepaalde integralen

Het bloemenvaasje heeft een inhoud van 1,95 liter.

15,563... · (5 cm)^3 = 1945,451... cm^3 = 1,945... dm^3 = 1,945... liter

Gebied tussen grafieken wentelen om de *x*-as

Door het gebied tussen de grafieken van de functies *f* en *g* over het interval [*a*, *b*] te wentelen om de *x*-as, ontstaat een omwentelingslichaam. Het volume van dit lichaam kunnen we beschouwen als een verschil van twee volumes.



We schrijven:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx - \pi \int_a^b g^2(x)\,dx$$

$$= \pi \left(\int_a^b f^2(x)\,dx - \int_a^b g^2(x)\,dx \right)$$ **gemeenschappelijke factor π afzonderen**

$$= \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx$$ **somregel integralen**

Als de grafiek van *f* boven de grafiek van *g* ligt in het interval [*a*, *b*], dan is het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied tussen de grafieken van de functies *f* en *g* over het interval [*a*, *b*] te wentelen om de *x*-as, gelijk aan:

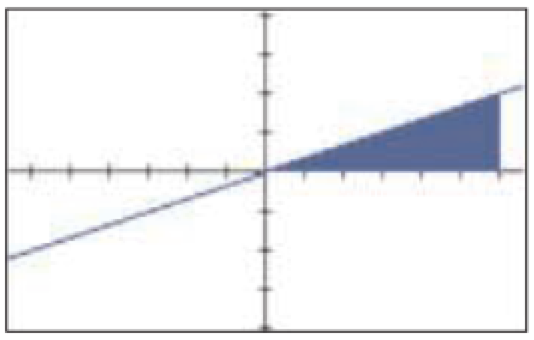
$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx$$

grafiek *f* ligt boven grafiek *g* in [*a*, *b*]

6

Bereken zonder ICT het volume van het lichaam dat ontstaat door het wentelen om de x-as van het gebied tussen de grafiek van de functie f en de x-as over het gegeven interval.

1 $f(x)=\frac{1}{3}x$ $[0, 6]$



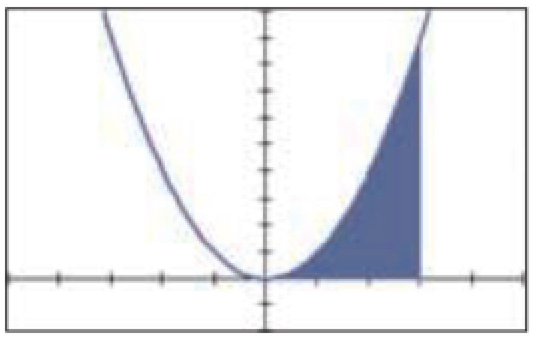
$V=$ ....

....

....

....

2 $f(x)=5x^2$ $[0, 3]$



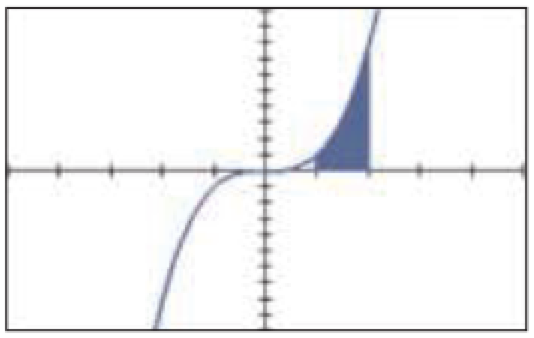
$V=$ ....

....

....

....

3 $f(x)=x^3$ $[1, 2]$



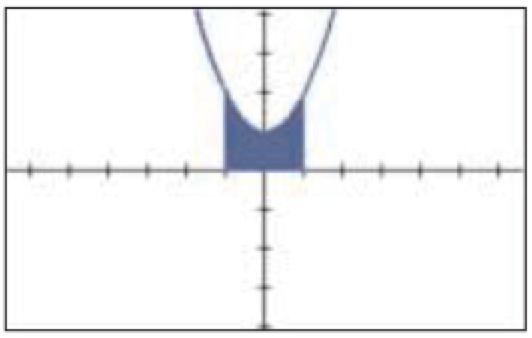
$V=$ ....

....

....

....

4 $f(x) = x^2 + 1$ $[-1, 1]$



$V =$ ....

....

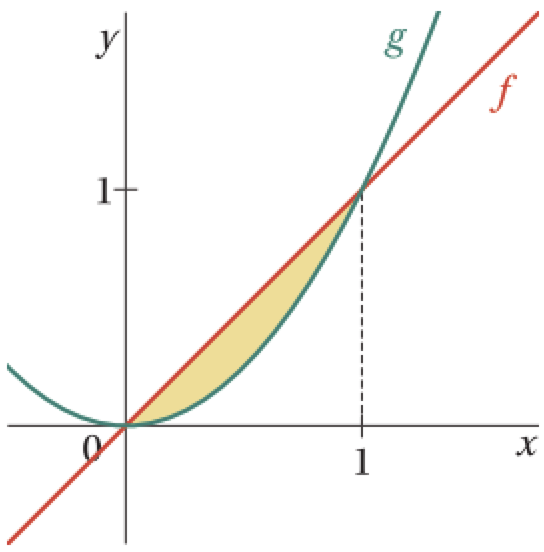
....

....

7

Bereken zonder ICT het volume van het lichaam dat ontstaat door het gekleurde gebied te wentelen om de x-as.

1 $f(x) = x$ en $g(x) = x^2$



$V =$ ....

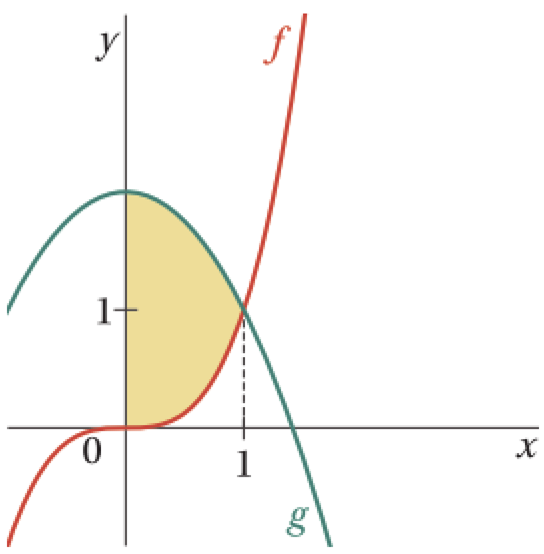
....

....

....

....

2 $f(x) = x^3$ en $g(x) = -x^2 + 2$



$V =$ ....

....

....

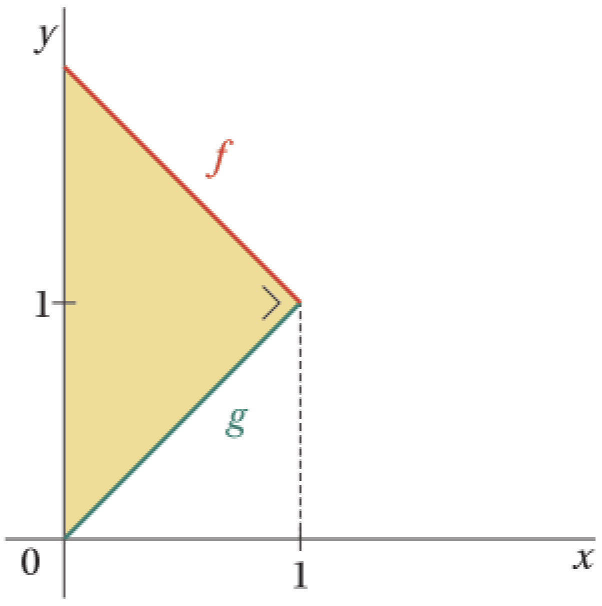
....

....

8

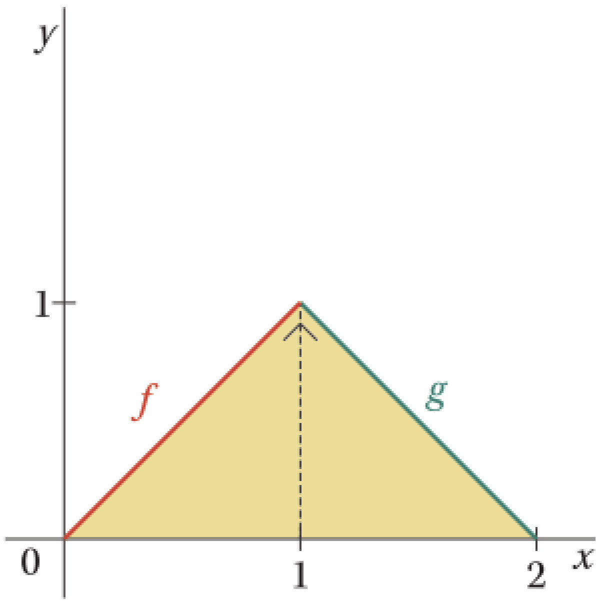
Bereken zonder ICT het volume van het lichaam dat ontstaat door het gekleurde gebied te wentelen om de x-as.

1 $f(x) = -x + 2$ en $g(x) = x$



$V =$ ....

2 $f(x) = x$ en $g(x) = -x + 2$

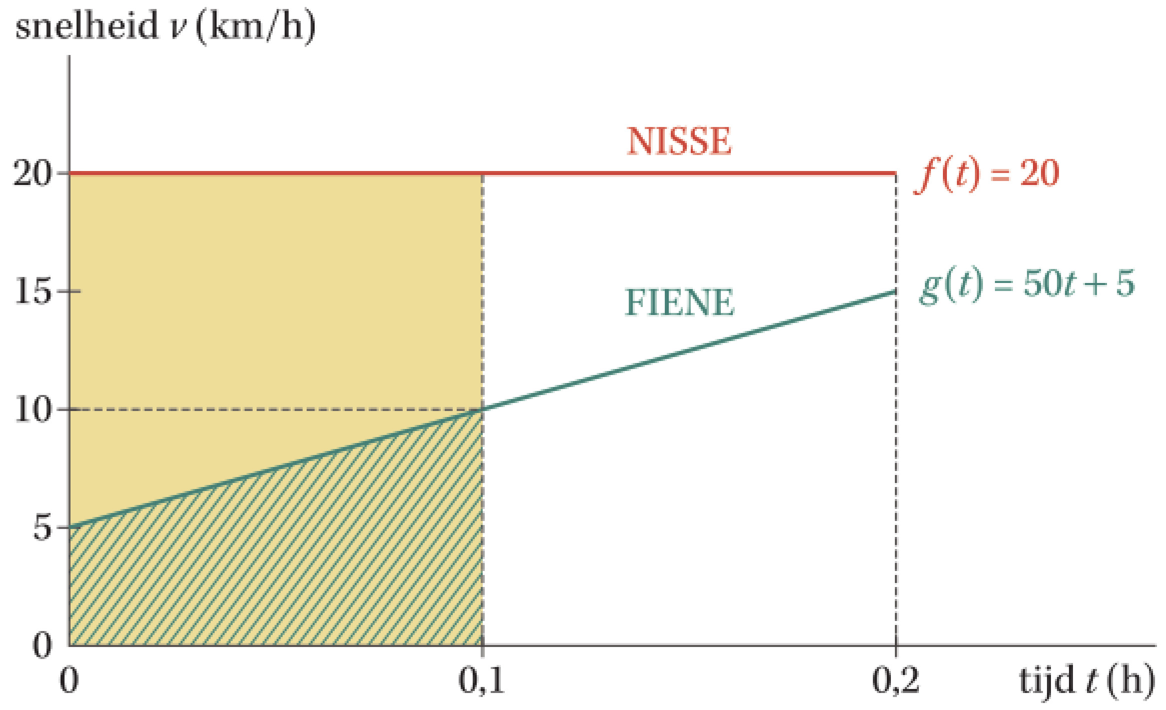


$V =$ ....

▶ Tijdsafhankelijke processen

9 Instap

Nisse en Fiene maken een fietstochtje. Hun rijgedrag lezen we af op de tijdsnelheidsgrafiek.



1 Wat is de snelheid van Nisse en Fiene na 6 minuten?

....

....

2 Bepaal het voorschrift van de oppervlaktefuncties A_1 en A_2 van de snelheidsfuncties f en g over het interval $[0, t]$.

....

....

....

....

3 Bereken de functiewaarden $A_1(0{,}1)$ en $A_2(0{,}1)$.

....

4 Noteer de functiewaarden $A_1(0{,}1)$ en $A_2(0{,}1)$ met bepaalde integralen.

....

5 De oppervlaktefunctie beschrijft de afgelegde weg of afstand.
Noteer met bepaalde integralen de afstanden die Nisse en Fiene afleggen tijdens de eerste 12 minuten van hun fietstochtje. Bereken deze integralen.

....

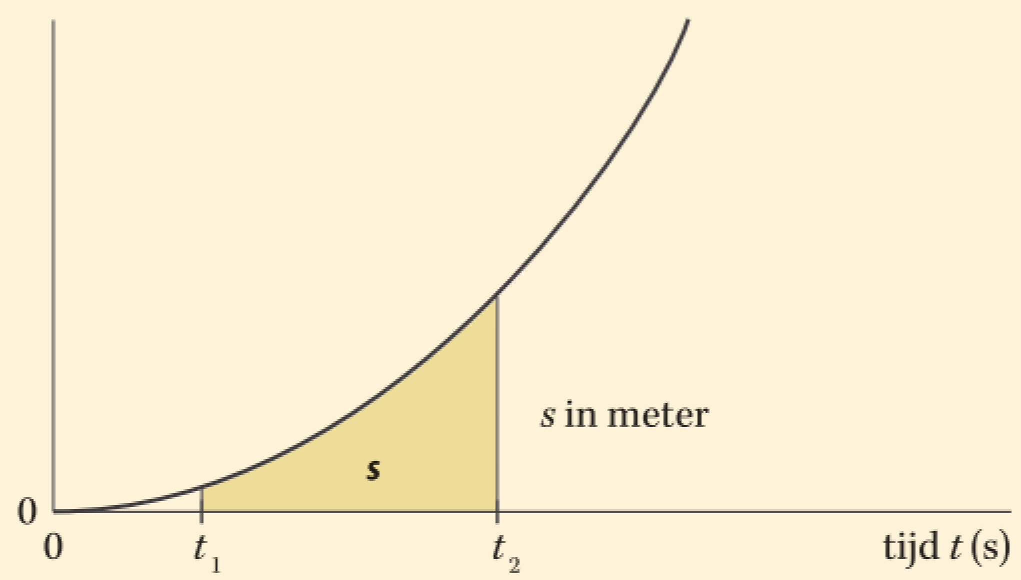
....

Tijdsafhankelijke processen

De snelheid van een vliegtuig, de versnelling van een raket, het debiet van een rivier, ... zijn **tijdsafhankelijke grootheden**.

Voor een **snelheidsfunctie *v*** die positief is in een tijdsinterval $[t_1, t_2]$ is de afgelegde weg tussen de tijdstippen t_1 en t_2:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

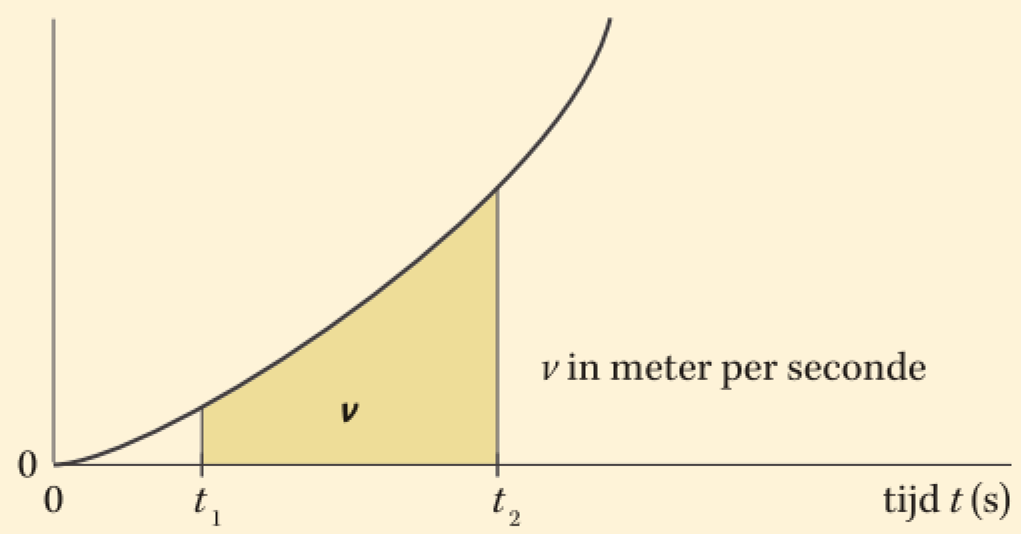


Het voorschrift van de afstandsfunctie $s(t)$ bepalen we met de onbepaalde integraal:

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

Voor een **versnellingsfunctie *a*** die positief is in een tijdsinterval $[t_1, t_2]$ is de snelheidsverandering tussen de tijdstippen t_1 en t_2:

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$



Het voorschrift van de snelheidsfunctie $v(t)$ bepalen we met de onbepaalde integraal:

$$v = \int a(t)\,dt$$

Merk op

Als we de versnellingsfunctie *a* kennen, dan kunnen we door integreren de snelheidsfunctie *v* bepalen en door nogmaals integreren de afstandsfunctie *s*.

Voorbeeld

De versnelling van een raket tijdens de eerste 10 seconden na de lancering kunnen we beschrijven met de versnellingsfunctie $a(t) = 12t$. We bepalen de snelheid en de hoogte na 10 seconden.

De snelheidsfunctie bepalen we door de versnellingsfunctie $a(t) = 12t$ te integreren en de integratieconstante gelijk te stellen aan nul:

$$v(t) = \int 12t\,\mathrm{d}t = 12 \cdot \frac{1}{2}t^2 = 6t^2$$ **integratieconstante c is nul omdat $v(0) = 0$**

De snelheid van de raket na 10 seconden is 2160 km/h:

$$v = \int_0^{10} 12t\,\mathrm{d}t = \left[6t^2\right]_0^{10} = 6 \cdot 10^2 - 0 = 600$$

600 m/s = 600 · 3,6 km/h = 2160 km/h

De afstandsfunctie bepalen we door de snelheidsfunctie $v(t) = 6t^2$ te integreren en de integratieconstante gelijk te stellen aan nul:

$$s(t) = \int 6t^2\,\mathrm{d}t = 6 \cdot \frac{1}{3}t^3 = 2t^3$$ **integratieconstante c is nul omdat $s(0) = 0$**

De hoogte van de raket na 10 seconden is 2 km:

$$s = \int_0^{10} 6t^2\,\mathrm{d}t = \left[2t^3\right]_0^{10} = 2 \cdot 10^3 - 0 = 2000$$

2000 m = 2 km



10

Abdel rijdt naar het fitnesscentrum. De rit duurt 6 minuten. De snelheid van zijn wagen wordt beschreven door de functie $v(t) = \frac{4}{3}t - \frac{2}{9}t^2$ waarin t de tijd in minuten voorstelt en $v(t)$ de snelheid in km/min.

1 Bereken de afstand die de wagen heeft afgelegd.

....

2 Bereken de gemiddelde snelheid tijdens deze rit.

....

11

Bij een test om het brandstofverbruik op te meten, registreert een computer de snelheid van een wagen in km/min. De opgemeten snelheidswaarden kunnen benaderd worden door de positieve functiewaarden van de functie $v(t) = -\frac{5}{12}t^2 + \frac{25}{12}t$.

1 Hoelang duurde deze testrit?

....

....

....

....

....

....

2 Bereken de weg afgelegd door de wagen tijdens deze rit. Rond af op 3 decimalen.

....

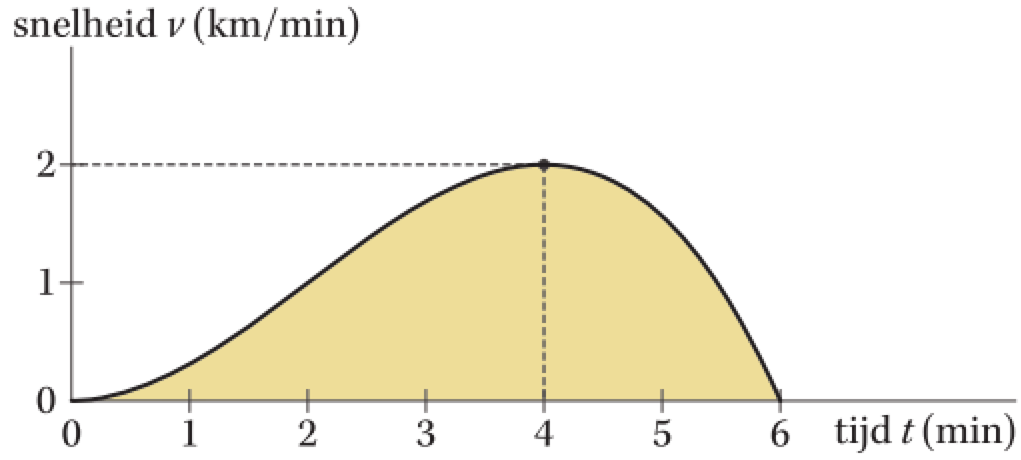
....

12

Een personenwagen vertrekt uit stilstand en trekt langzaam op. Na 4 minuten ziet de bestuurder in de verte een file, remt lichtjes af en komt tot stilstand. De snelheidsfunctie van de wagen voldoet aan het voorschrift:

$v(t) = -\frac{1}{16}t^3 + \frac{3}{8}t^2$

v : snelheid in km/min
t : tijd in min



1 Hoelang heeft de rit geduurd? ....

Hoeveel kilometer heeft de wagen in totaal afgelegd?

....

Bereken uit deze gegevens de gemiddelde snelheid in km/h.

....

2 Gedurende hoeveel minuten versnelde de wagen? ....

Hoeveel kilometer werd er afgelegd tijdens het optrekken?

....

Bereken hieruit de gemiddelde snelheid in km/h tijdens het optrekken.

....

3 Gedurende hoeveel minuten vertraagde de wagen? ....

Hoeveel kilometer werd er afgelegd tijdens het afremmen?

....

Bereken hieruit de gemiddelde snelheid in km/h tijdens het vertragen.

....

13

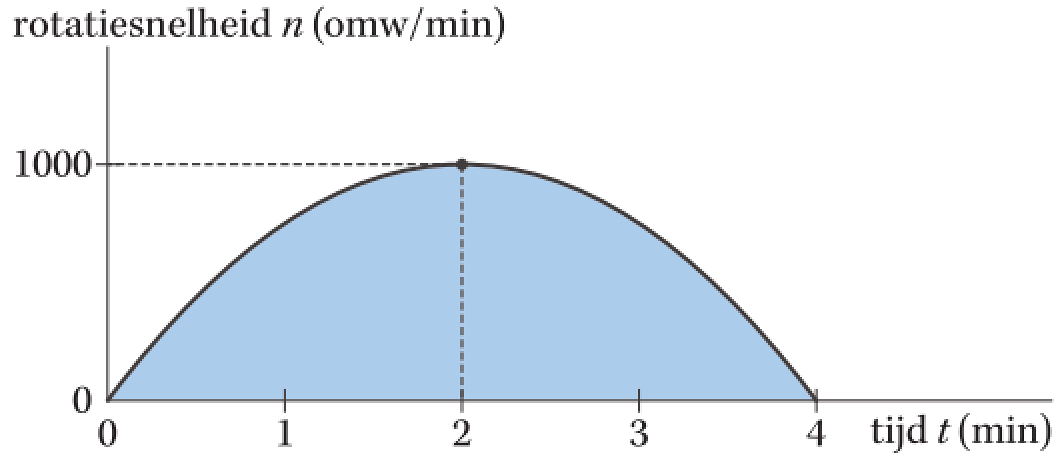
Na de laatste spoelbeurt wordt het linnen in een wasmachine doorgaans 4 minuten gecentrifugeerd. Het droogzwieren van de was komt meestal traag op gang. Wanneer het maximale toerental nog maar net bereikt is, vermindert de aandrijfkracht reeds.

De rotatiesnelheid van de wastrommel tijdens het droogzwieren verloopt in het tijdsinterval [0, 4] volgens de functie:

$n(t) = -250t^2 + 1000t$

n : aantal omw/min

t : tijd in minuten



1 Hoeveel omwentelingen doet de trommel tijdens het centrifugeproces?

....

....

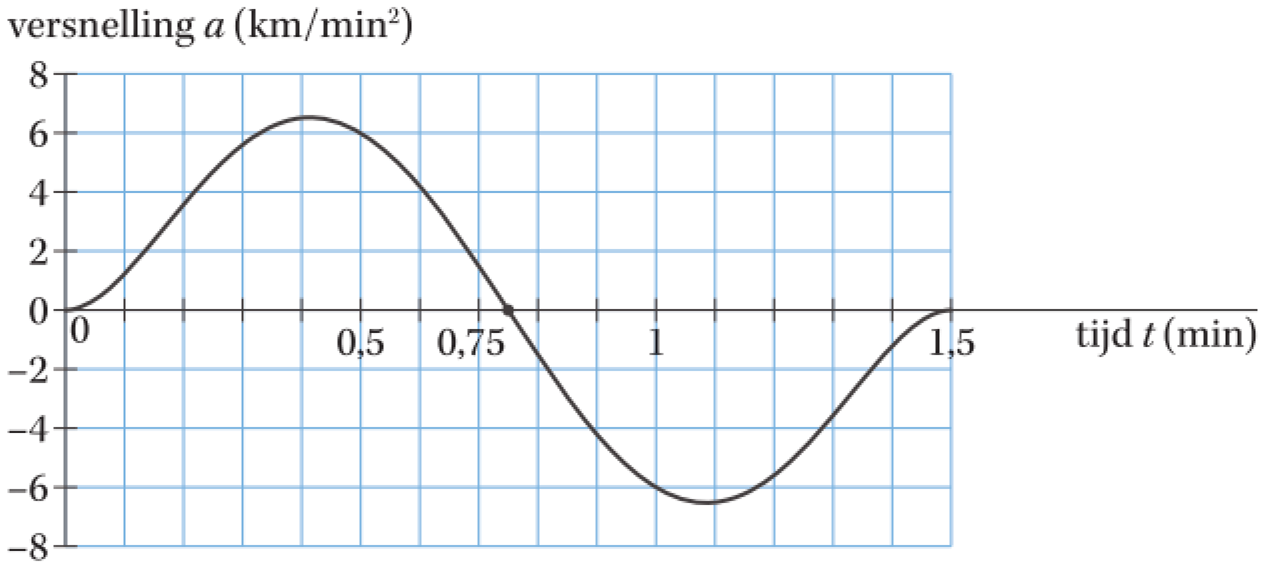
2 Hoeveel omwentelingen maakt de wasmachine tijdens de laatste minuut van het droogzwieren?

....

....

14

Een Formule 1-piloot maakt een oefenritje op een rechte baan. Hij vertrekt vanuit stilstand. De versnellingsfunctie van de wagen voldoet in het tijdsinterval [0 ; 1,5] aan het voorschrift $a(t) = -6t^2(16t^3 - 60t^2 + 72t - 27)$ waarin a de versnelling in km/min² voorstelt en t de tijd in minuten.



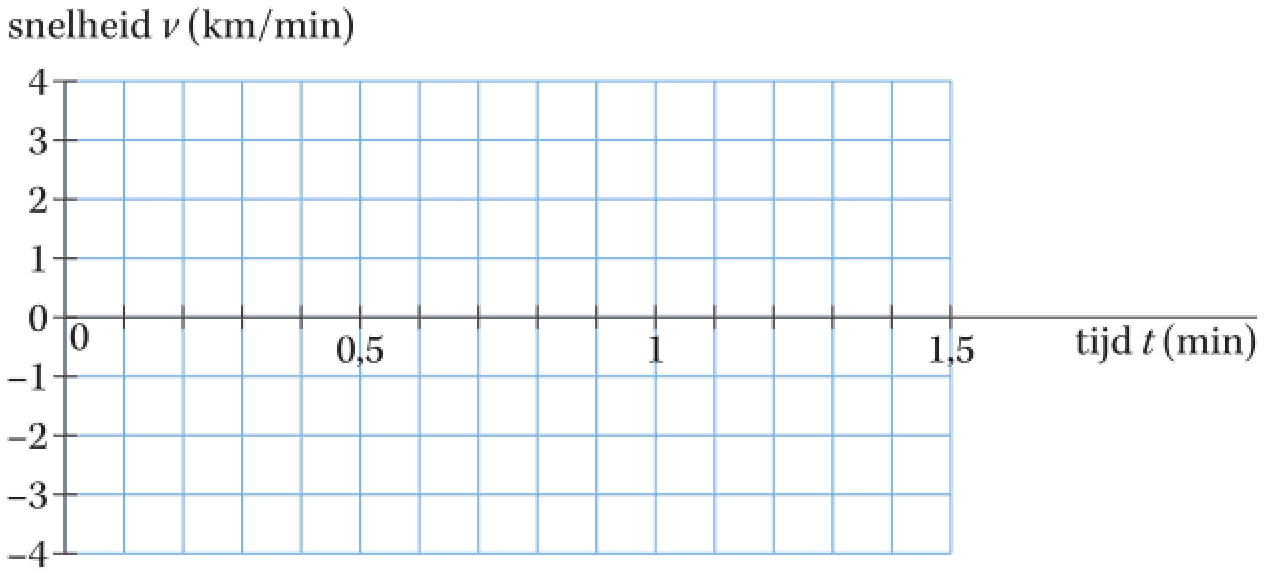
1 Wat is het voorschrift van de snelheidsfunctie $v(t)$?

....

....

....

2 Teken met ICT de grafiek van de snelheidsfunctie.



3 Wanneer is de snelheid van de racewagen maximaal?

....

Hoe kunnen we dit afleiden uit de grafiek van de versnellingsfunctie?

....

....

4 In welk tijdsinterval remt de wagen af?

....

Hoe kunnen we dit afleiden uit het voorschrift van de versnellingsfunctie?

....

Arbeid bij variabele krachten

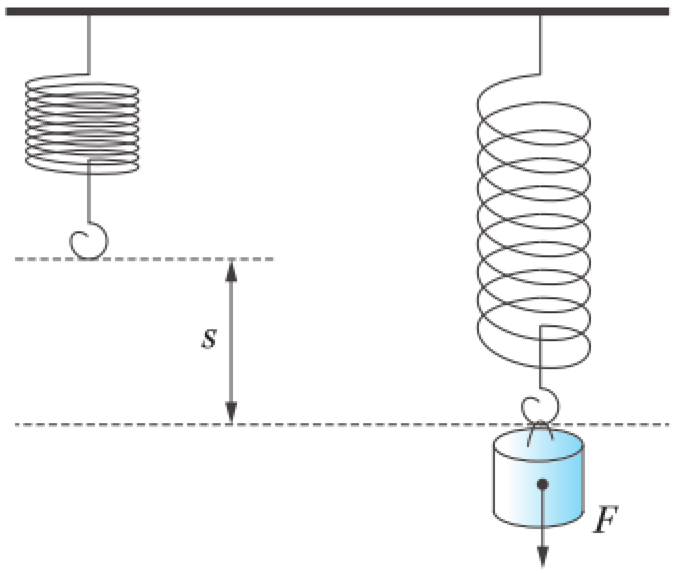
15 Instap

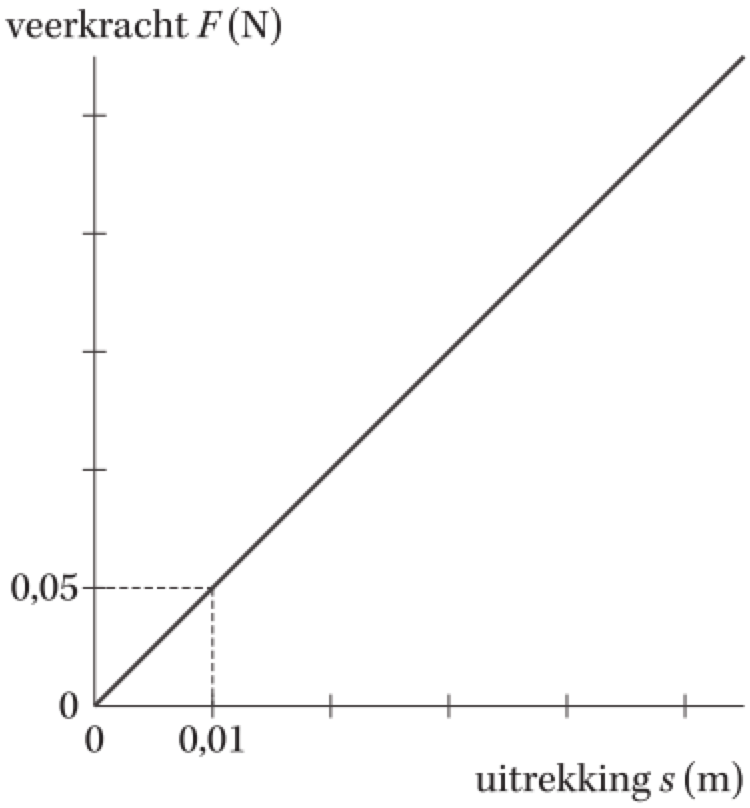
Hoe harder we aan een veer trekken, hoe langer ze wordt.
Volgens de wet van Hooke is bij kleine uitrekkingen de veerkracht F recht evenredig met de uitrekking s:

$F = k \cdot s$

F : veerkracht in N
k : veerconstante in N/m
s : uitrekking in m

Voor een veer met veerconstante $k = 5$ N/m is de grafiek van de krachtfunctie $F(s) = 5s$ getekend.





1 Wat is de kracht die nodig is om de veer 2 cm uit te rekken?

....

2 Bepaal het voorschrift van de oppervlaktefunctie A van de krachtfunctie F over het interval $[0, s]$.

....

....

....

....

3 Bereken de functiewaarde $A(0{,}02)$.

....

4 Kleur het gebied onder de grafiek van F die $A(0{,}02)$ als oppervlakte heeft.

5 Noteer de functiewaarde $A(0{,}02)$ met een bepaalde integraal.

....

6 De oppervlaktefunctie beschrijft de verrichte arbeid W uitgedrukt in joule.

Noteer met een bepaalde integraal de arbeid nodig om de veer 4 cm uit te rekken. Bereken deze integraal.

....

Arbeid bij variabele krachten

Voor een **constante kracht**, zoals bijvoorbeeld de motorkracht van een wagen die met een constante snelheid rijdt, wordt de arbeid berekend met de formule:

$$W = F \cdot s$$

W: arbeid in J (joule)
F: kracht in N (newton)
s: verplaatsing in meter volgens de richting van de kracht

Voor een **variabele kracht**, zoals bijvoorbeeld de trekkracht van een veer, berekenen we de verrichte arbeid met de bepaalde integraal:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds$$

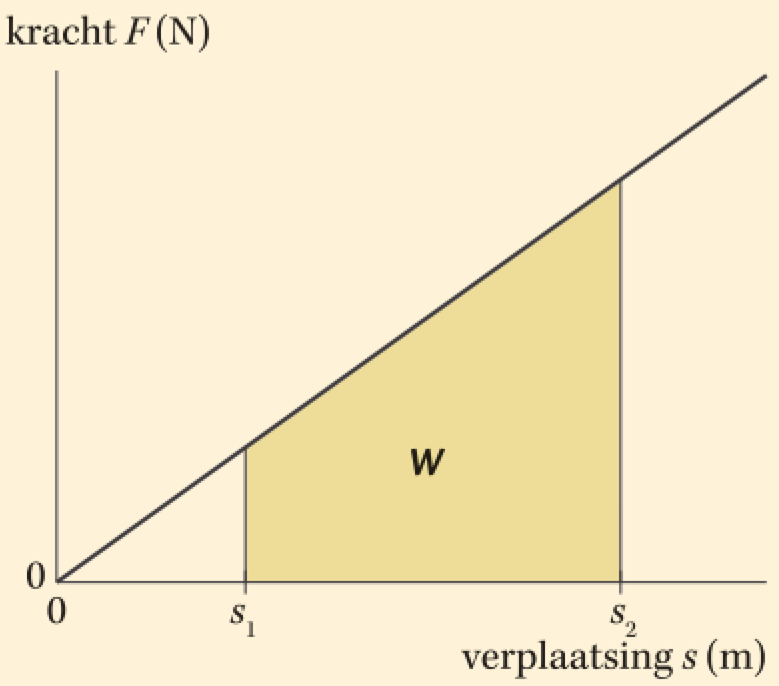
W: arbeid in J (joule)

$F(s)$: variabele kracht of krachtfunctie

s: verplaatsing in meter volgens de richting van de kracht

s_1: beginwaarde van s

s_2: eindwaarde van s



Het voorschrift van de arbeidsfunctie $W(s)$ bepalen we met de onbepaalde integraal:

$$W(s) = \int F(s)\,ds$$

Voorbeeld

We berekenen de arbeid nodig om een veer met krachtfunctie $F(s) = 6s$ uit te rekken over een afstand van 10 cm.

$$W = \int_0^{0,1} 6s\,ds \qquad W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds$$

$s_1 = 0 \qquad s_2 = 10\text{ cm} = 0,1\text{ m} \qquad F(s) = 6s$

$$= \left[3s^2\right]_0^{0,1} \qquad \text{hoofdstelling van de integraalrekening}$$

$$= 3 \cdot 0,1^2 - 0$$

$$= 0,03$$

De arbeid die nodig is om de veer 10 cm uit te rekken, is 0,03 J.

16

Van een veer is de veerconstante 3 N/m.

1 Bepaal het voorschrift van de arbeidsfunctie $W(s)$.

....

....

2 Bereken de arbeid die nodig is om de veer 5 cm uit te rekken.

....

....

3 Bereken de arbeid die nodig is om de veer nog 5 cm verder uit te rekken.

....

....

17

Van een veer is de veerconstante 10 N/m. Een arbeid van 0,2 J wordt geleverd om de veer uit te rekken. Over welke afstand is de veer uitgerekt?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Uitdagingen

1 Wat is de oppervlakte tussen de parabool met vergelijking $y = 3x^2 - 6x + 2$ en de rechte met vergelijking $x - y = 0$? Bereken zonder ICT.

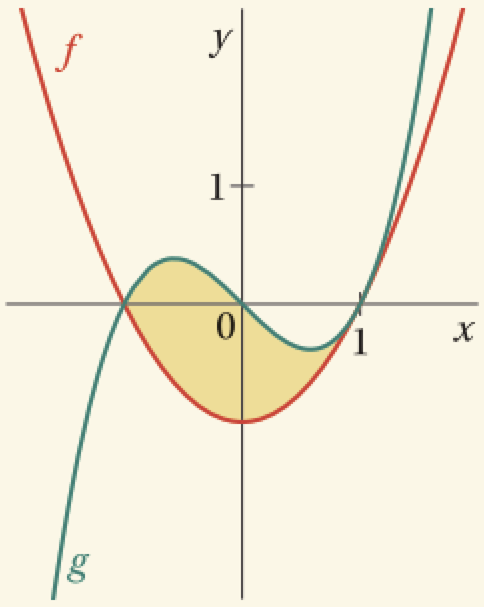
(A) $\frac{121}{54}$ (B) $\frac{125}{54}$ (C) $\frac{127}{54}$ (D) $\frac{131}{54}$

2 Wat is de oppervlakte van de figuur ingesloten door de x-as en de grafieken van de functies $f(x) = \frac{x-1}{2}$ en $g(x) = 2(x-4)$?

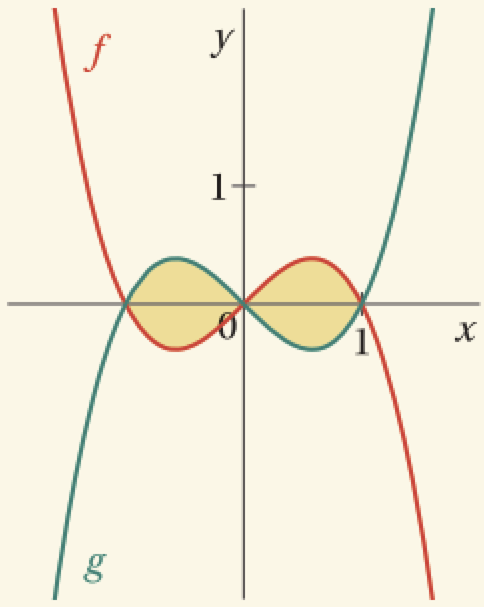
(A) 2,5 (B) 3 (C) 3,5 (D) 4

3 Bereken zonder ICT de oppervlakte van het gekleurde gebied tussen de grafieken van de functies f en g.

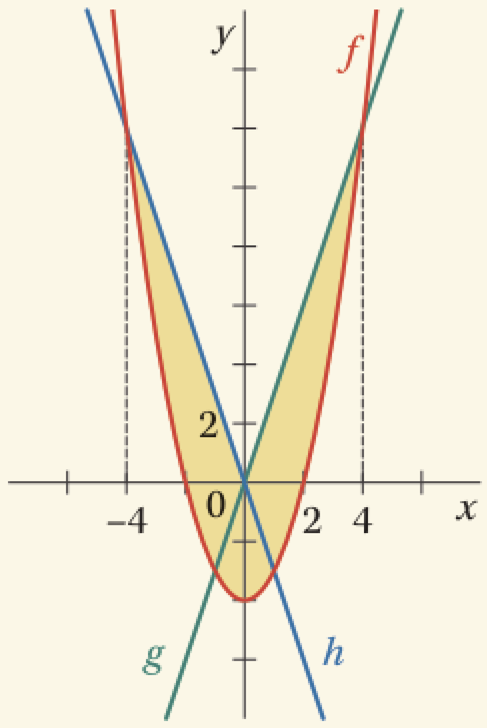
1 $f(x) = x^2 - 1$ en $g(x) = x^3 - x$



2 $f(x) = -x^3 + x$ en $g(x) = x^3 - x$



4 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 3x$ en $h(x) = -3x$. Bereken de oppervlakte van het gekleurde gebied.



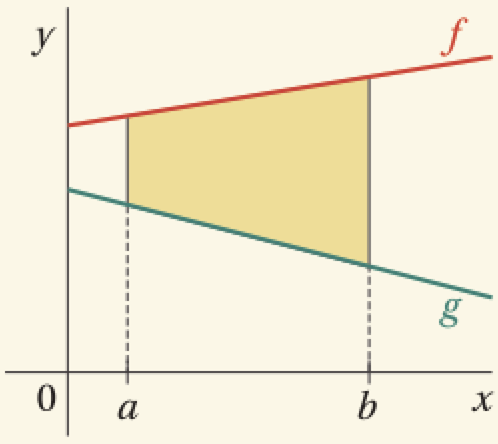
5 Bereken zonder ICT de oppervlakte van de gebieden ingesloten door de grafieken van de functies f en g.

1 $f(x)=x^3+2$ en $g(x)=2x^2+x$

2 $f(x)=x^3-4x+6$ en $g(x)=x^2+2$

6 Vink de passende integralen aan.

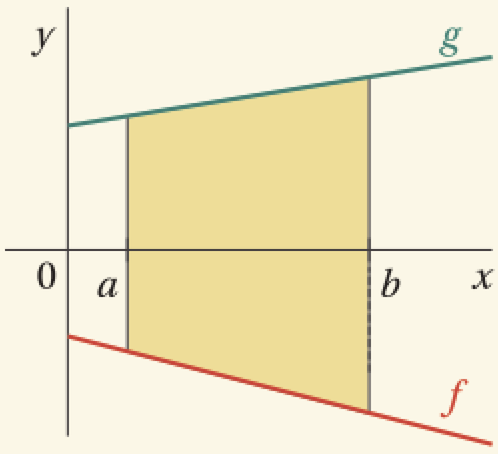
1



$A=\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$ ☐

$A=\int_a^b |g(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x$ ☐

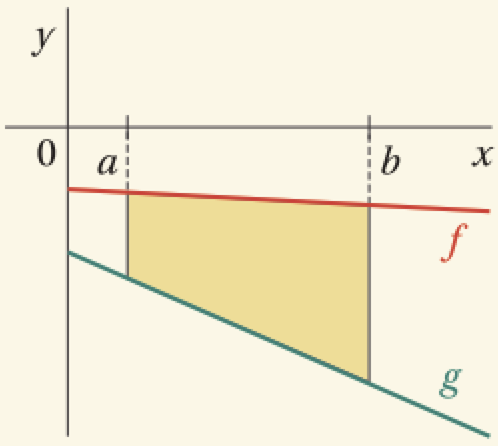
2



$A=\int_a^b (g(x)+f(x))\,\mathrm{d}x$ ☐

$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$ ☐

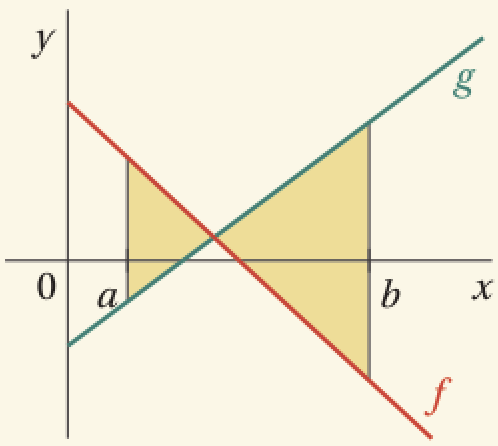
3



$A=\int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x$ ☐

$A=\int_a^b |g(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x$ ☐

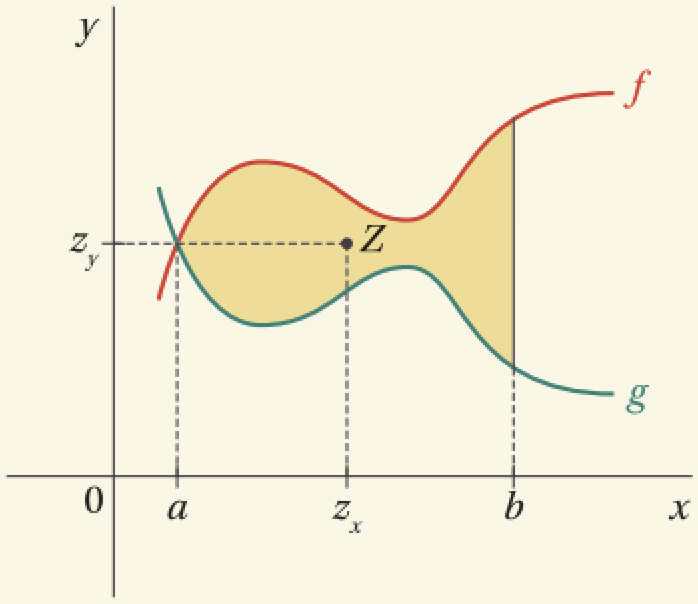
4



$A=\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x$ ☐

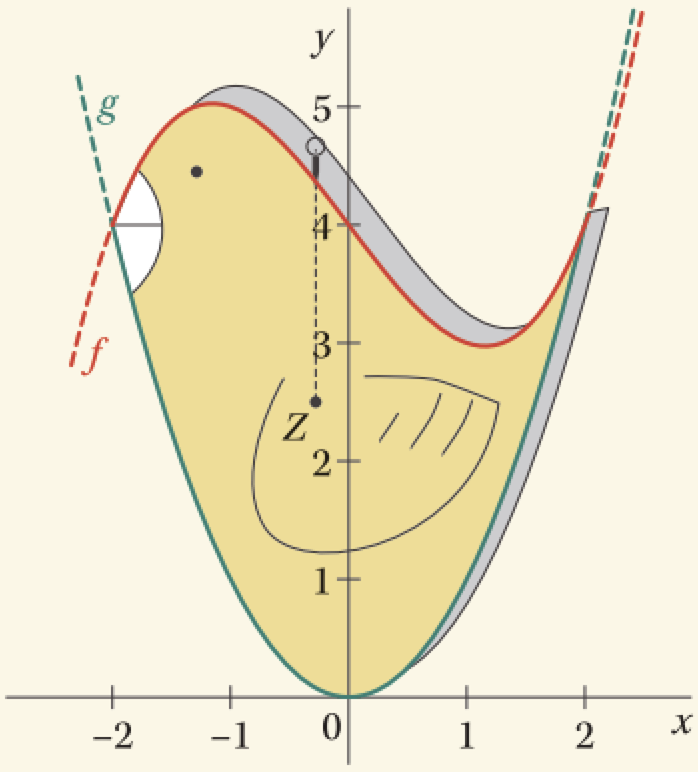
$A=\int_a^b |g(x)+f(x)|\,\mathrm{d}x$ ☐

7 Het zwaartepunt Z van het oppervlak tussen de grafieken van de functies f en g over het interval $[a, b]$ kunnen we berekenen met de volgende **zwaartepuntformules**:



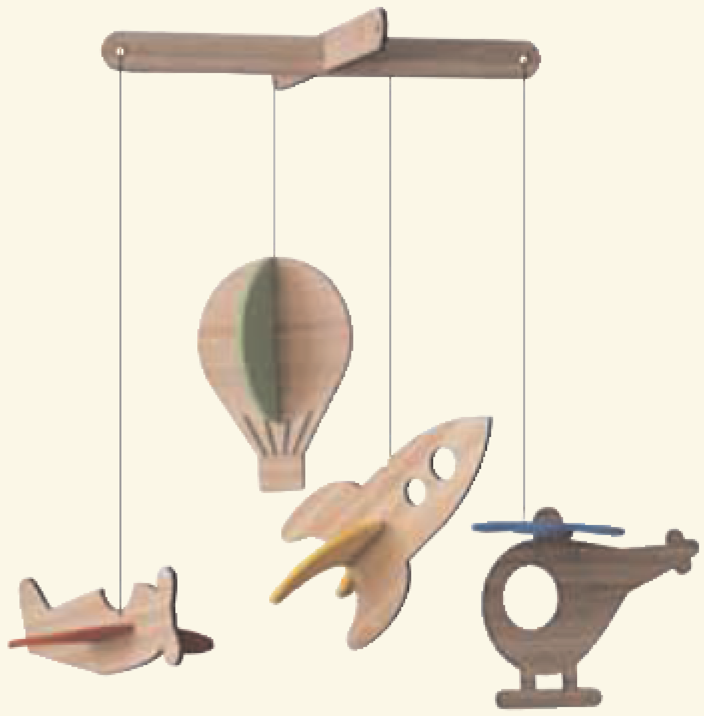
$$Z_x = \frac{\int_a^b x\left(f(x) - g(x)\right)dx}{\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx} \qquad Z_y = \frac{\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx}{2\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx}$$

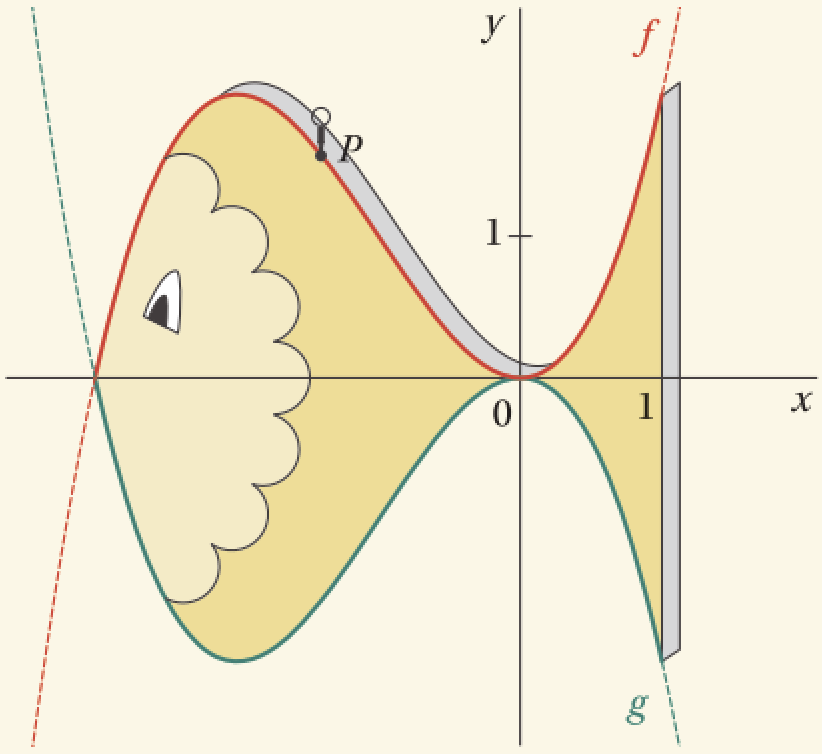
De bovenlijn van de kartonnen kip wordt beschreven door de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x + 4$ en de onderlijn door de functie $g(x) = x^2$. Wanneer we dit kartonnen sieraad als een mobiel ophangen, moet het oogschroefje precies boven het zwaartepunt bevestigd worden.



Bepaal het zwaartepunt Z van de kartonnen kip.

8 Om een houten vis als een mobieltje op te hangen, bevestigen we het oogschroefje precies boven het zwaartepunt.

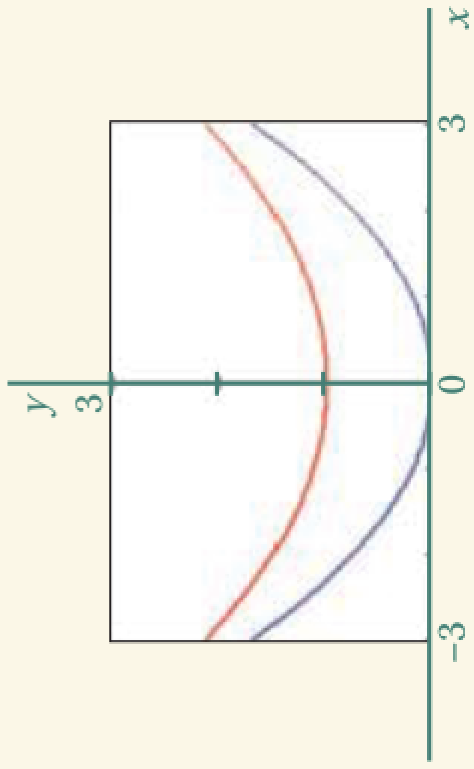




Bepaal de juiste plaats van het oogschroefje P als de bovenlijn van de vis beschreven wordt door de functie $f(x) = 0{,}5x^3 + 1{,}5x^2$ en de vis symmetrisch is ten opzichte van de x-as.

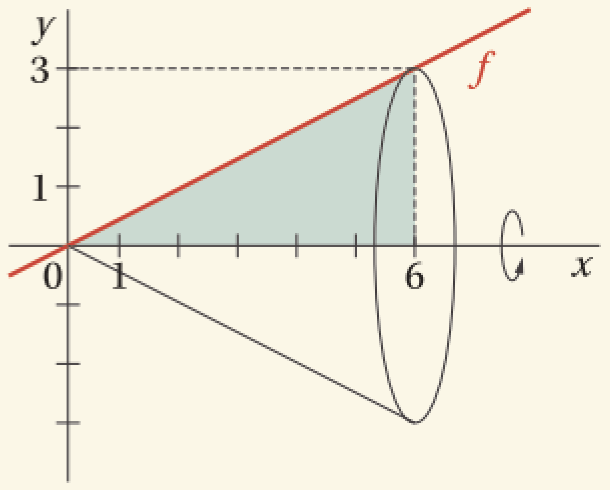
9 Een goed geworpen boemerang beschrijft een cirkelvormige baan. Hij roteert hierbij om de as door het zwaartepunt loodrecht op het vlak van de boemerang. Bepaal het zwaartepunt van een boemerang bepaald door het gebied tussen de grafieken van $f(x) = 0{,}1875x^2$ en $g(x) = 0{,}125x^2 + 1$ over het interval $[-3, 3]$.



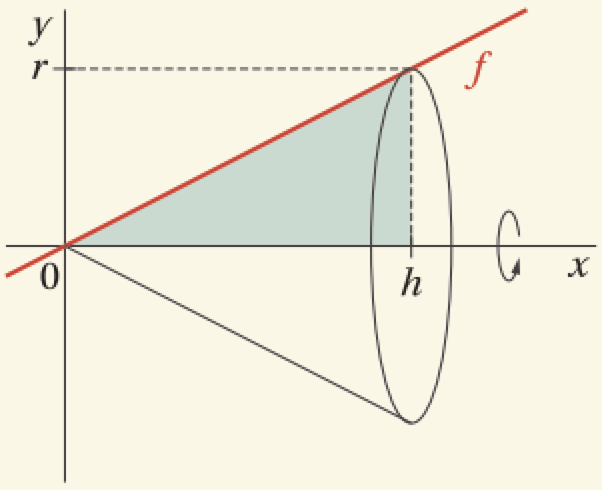


10 Bereken het volume van de omwentelingskegel die ontstaat door het wentelen om de x-as van de gekleurde driehoek.

1 $f(x) = 0{,}5x$

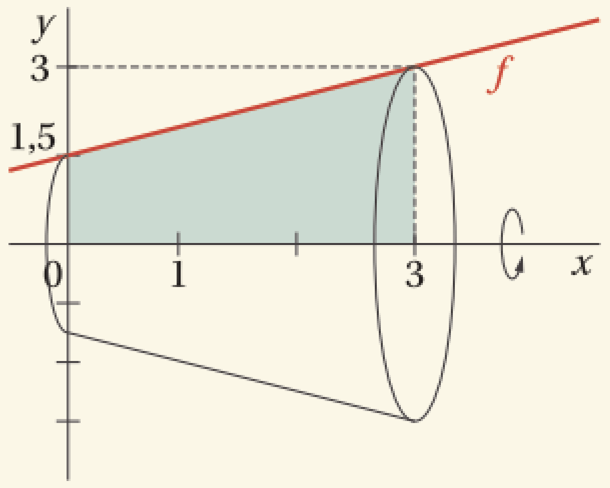


2 $f(x) = \dfrac{r}{h}x$

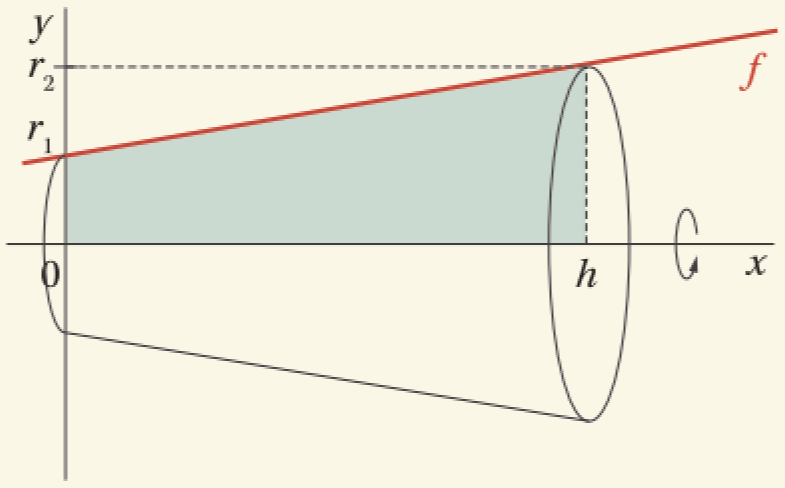


11 Bereken het volume van de afgeknotte kegel die ontstaat door het wentelen om de x-as van het gekleurde trapezium.

1 $f(x) = 0{,}5x + 1{,}5$

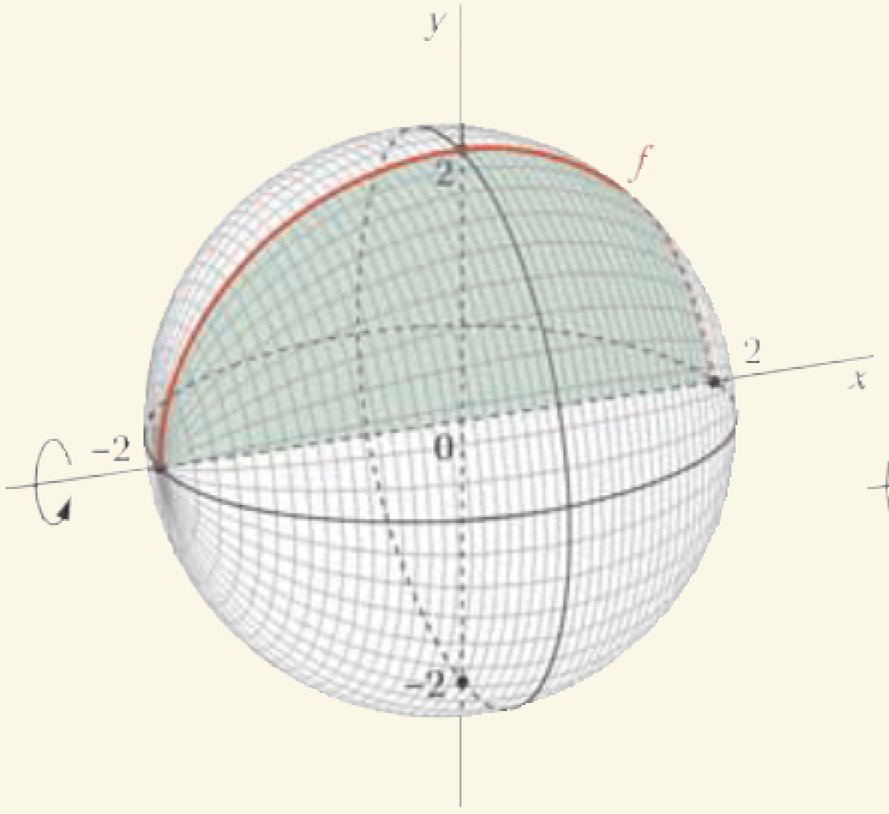


2 $f(x) = \dfrac{r_2 - r_1}{h} \cdot x + r_1$

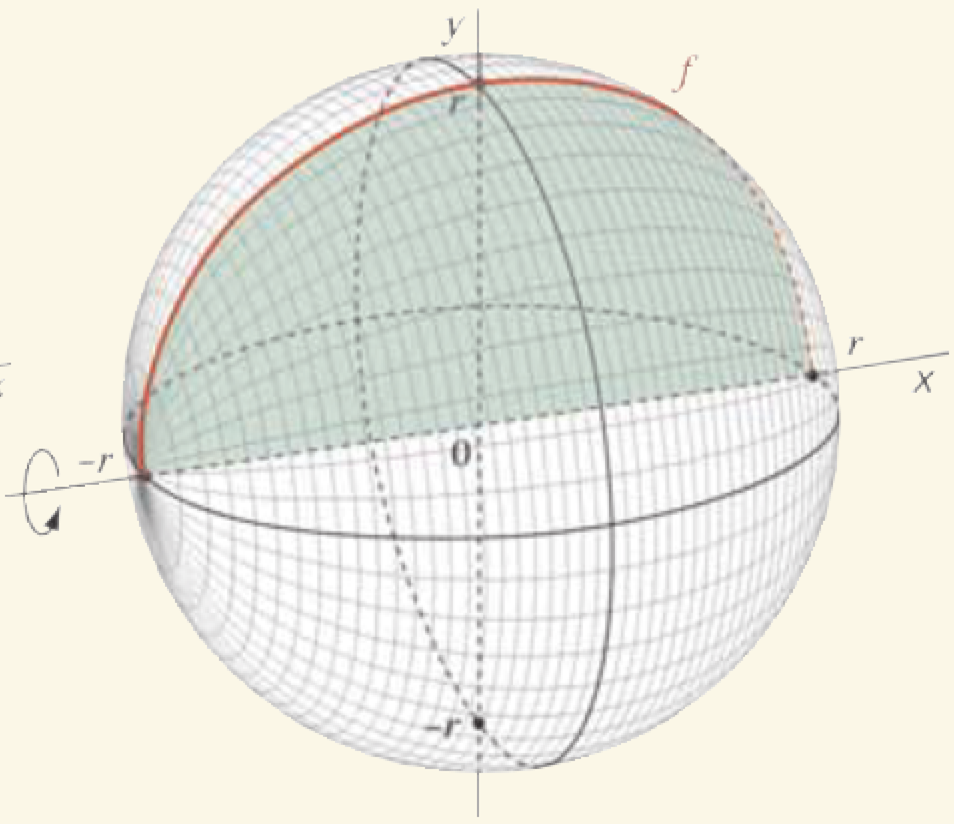


12 Bereken het volume van de bol die ontstaat door het wentelen om de x-as van de gekleurde halve cirkel.

1 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$



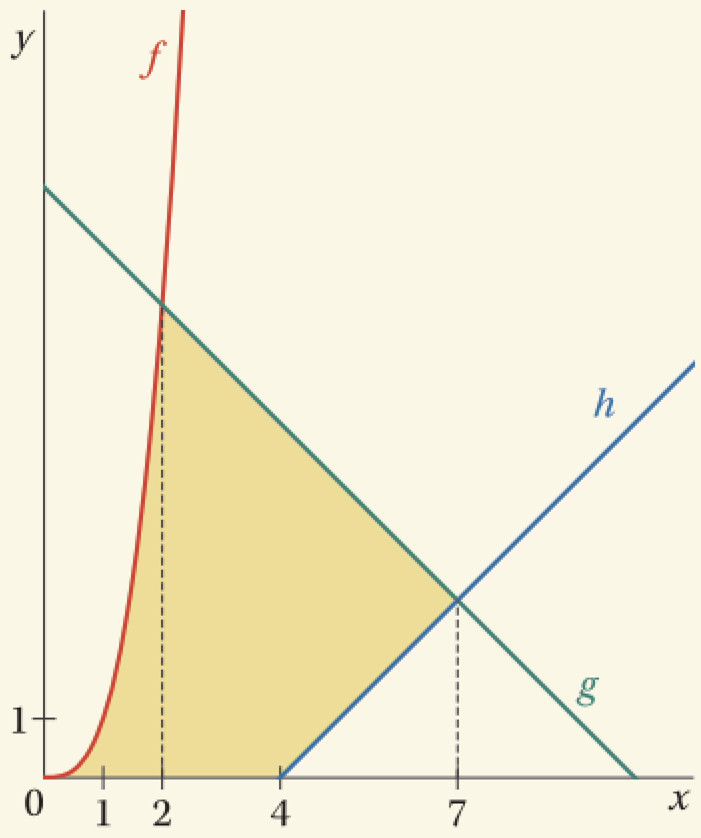
2 $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$



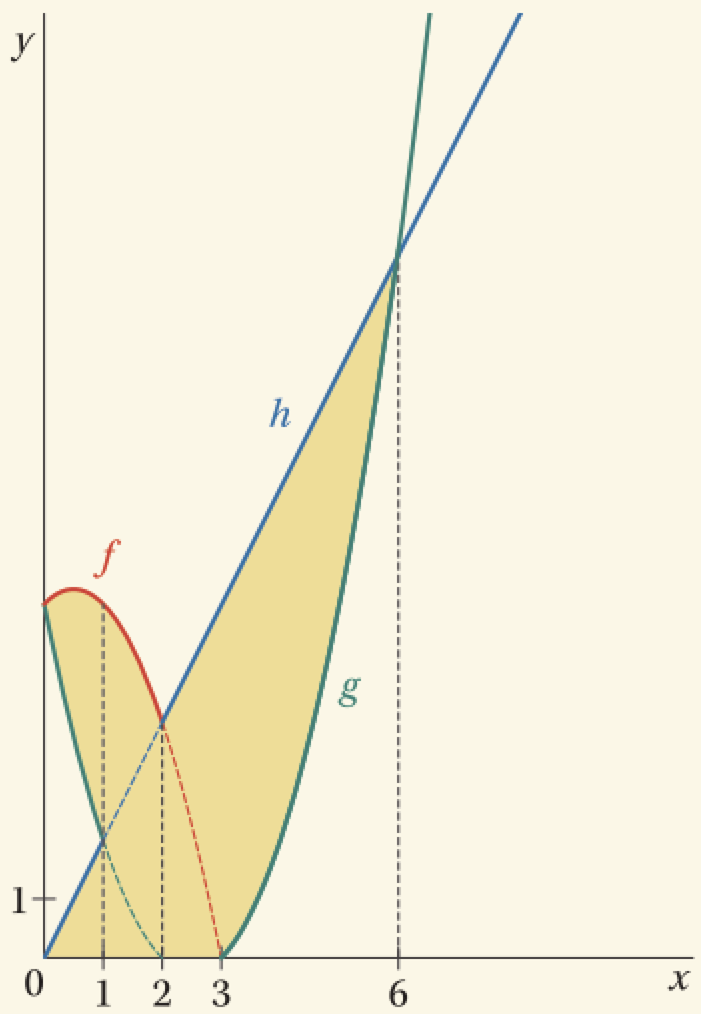
13 Bereken het volume van het lichaam dat ontstaat door wenteling om de x-as van het gebied ingesloten door de grafieken van de functies $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x+4$ en $g(x)=x^2$.

14 Gegeven zijn de grafieken van de functies f, g en h. Bereken het volume van het lichaam dat ontstaat door het gekleurde gebied te wentelen om de x-as.

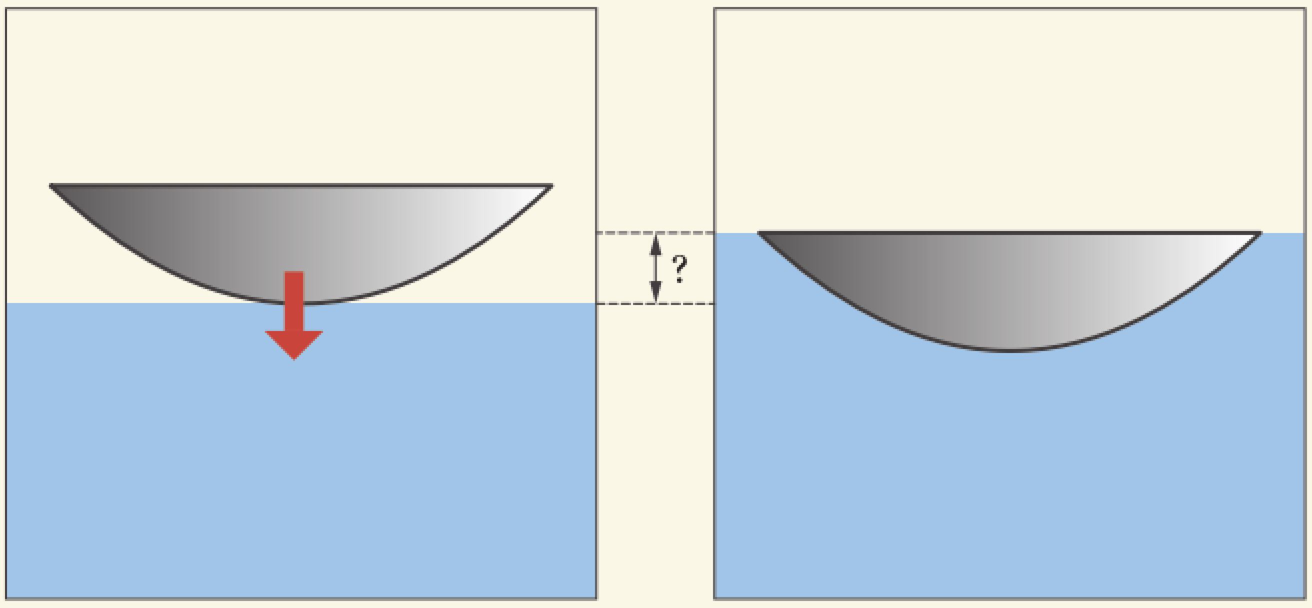
1 $f(x)=x^3$ $\quad g(x)=-x+10$ $\quad h(x)=x-4$



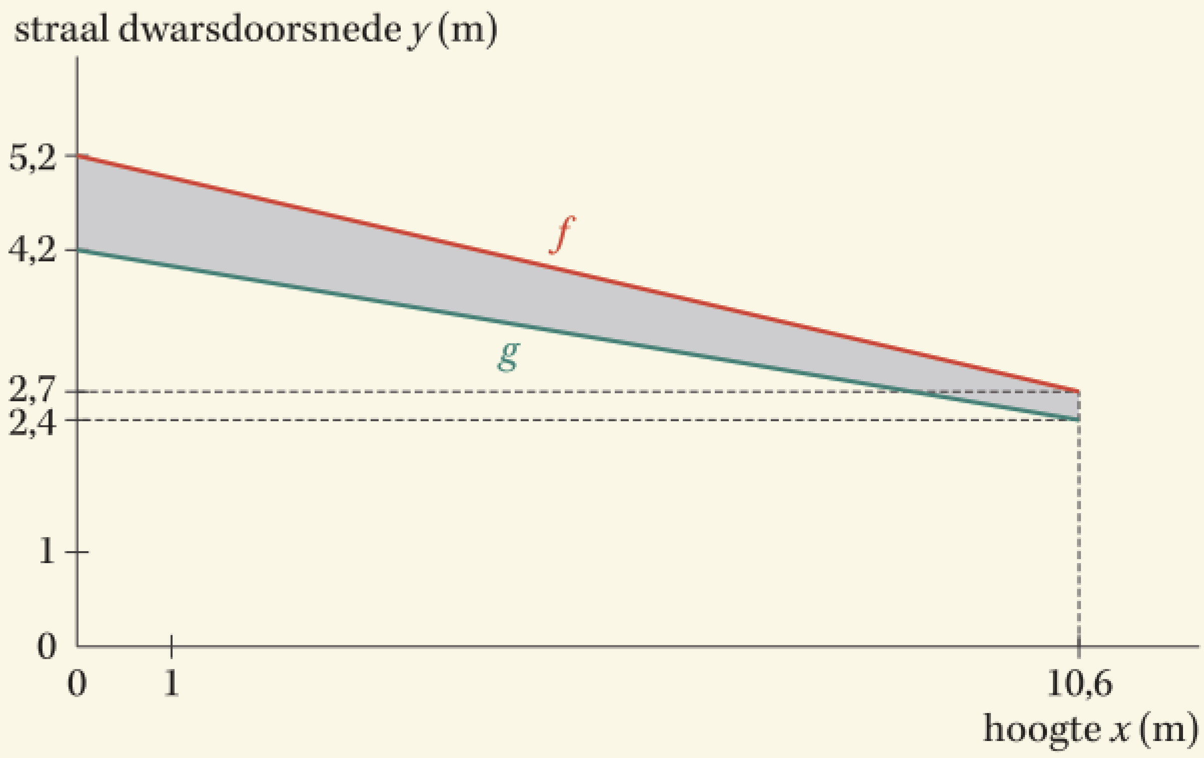
2 $f(x)=-x^2+x+6$ $\quad g(x)=x^2-5x+6$ $\quad h(x)=2x$



15 Een kubus met een zijde van 10 cm is voor de helft met water gevuld. Een metalen schaaltje heeft de vorm van een omwentelingslichaam, ontstaan door het wentelen om de x-as van de grafiek van $f(x) = 3\sqrt{x}$ over het interval [0, 2]. Hoeveel millimeter stijgt het water als we het schaaltje tot de rand in het water onderdompelen?



16 Molen ter Rijst in Herzele is één van de machtigste stenen windmolens in Vlaanderen. De stenen kuip heeft een hoogte van 10,6 m. Onderaan zijn de muren 1 meter dik. Ze versmallen naar boven toe zodat bovenaan nog een muurdikte van 30 cm overblijft. De binnendiameter van de bakstenen kuip bedraagt onderaan 8,4 m. Helemaal bovenaan is de binnendiameter nog 4,8 m.





Hoeveel kubieke meter steen is er in de molenkuip verwerkt? We houden geen rekening met de deur en de ramen.

17 Gedurende 1,5 uur wordt de snelheid van een wandelaar opgetekend. De computer zet deze gegevens om in de formule $v(t) = -4t^3 + 12t$ waarin v de snelheid in km/h voorstelt en t de tijd in uur.

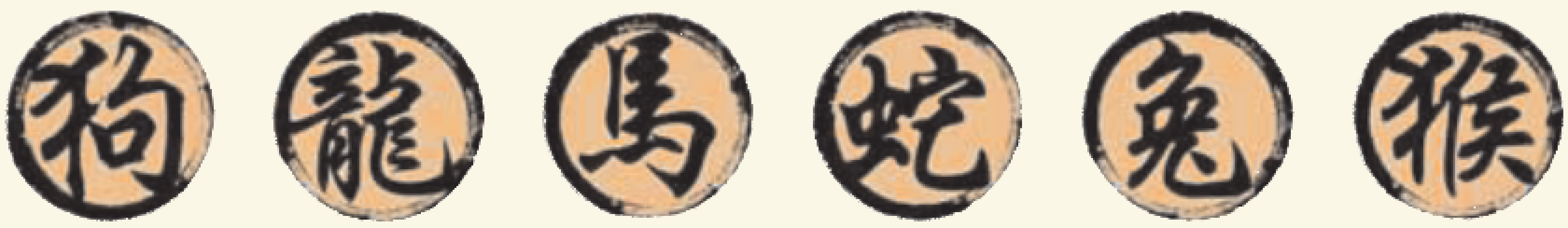
1. Bereken de afstand afgelegd door de wandelaar.
2. Bereken de gemiddelde wandelsnelheid.
3. Na hoeveel tijd heeft de wandelaar al 5 km gestapt?

18 De centrifuge van een wasmachine doet een laatste zwierbeurt van 6 minuten. De draaisnelheid wordt beschreven door de functie $n(t) = -30t(t^2 - 5t - 6)$ waarin n het aantal toeren per minuut voorstelt en t de tijd in minuten.

1. Bereken het aantal omwentelingen tijdens de zwierbeurt.
2. Bereken de gemiddelde draaisnelheid.
3. Op welke tijdstippen wordt deze gemiddelde snelheid bereikt?

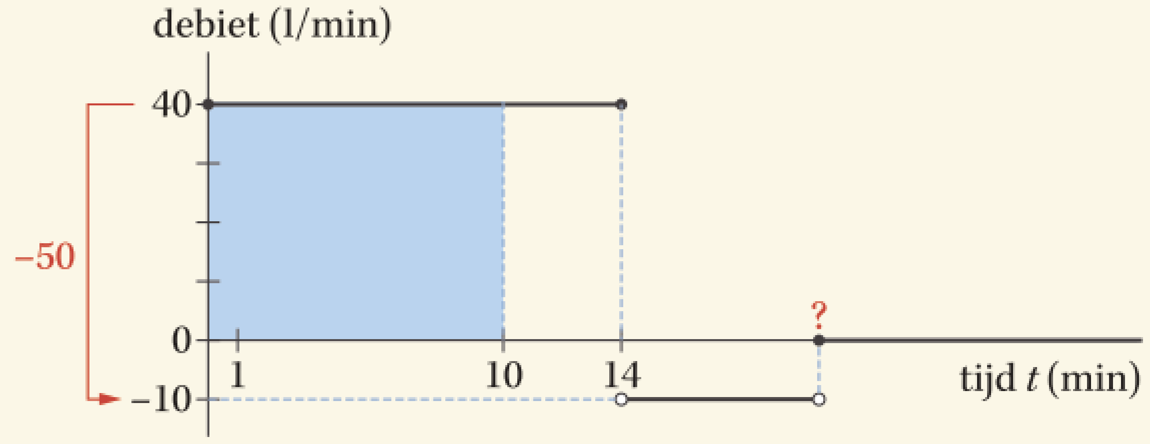
19 Je hebt een goed geheugen nodig om een vreemde taal te studeren. Een experiment op studenten die een cursus Japans volgen, leert ons dat het van buiten leren van woorden sterk afhankelijk is van de tijd. De doorsneestudent voldoet aan de functie
$w(t) = -\frac{1}{300}t^2 + \frac{1}{5}t$ waarin w het aantal van buiten geleerde woorden per minuut voorstelt en t de studietijd in minuten.

1. Wanneer is het verzadigingspunt voor deze doorsneestudent bereikt?
2. Hoeveel woorden heeft hij op dat ogenblik van buiten geleerd?
3. Hoeveel woorden leert de doorsneestudent gemiddeld per minuut tussen de aanvang en het verzadigingsmoment van de studie?
4. Wanneer memoriseert hij de meeste woorden per minuut?
5. Hoeveel woorden memoriseert hij dan per minuut?
6. Hoeveel woorden leert hij in een tijdspanne van een half uur te beginnen 10 minuten na het startmoment?



hond draak paard slang konijn aap

20 Een zitbad heeft een inhoud van 600 liter. De toevoerkraan wordt volledig opengedraaid en heeft een debiet van 40 l/min. Na 14 minuten wordt de stop uit het bad getrokken. De afvoerpijp heeft een debiet van 50 l/min. De globale debietcurve van watertoevoer en waterafvoer is hieronder afgebeeld.



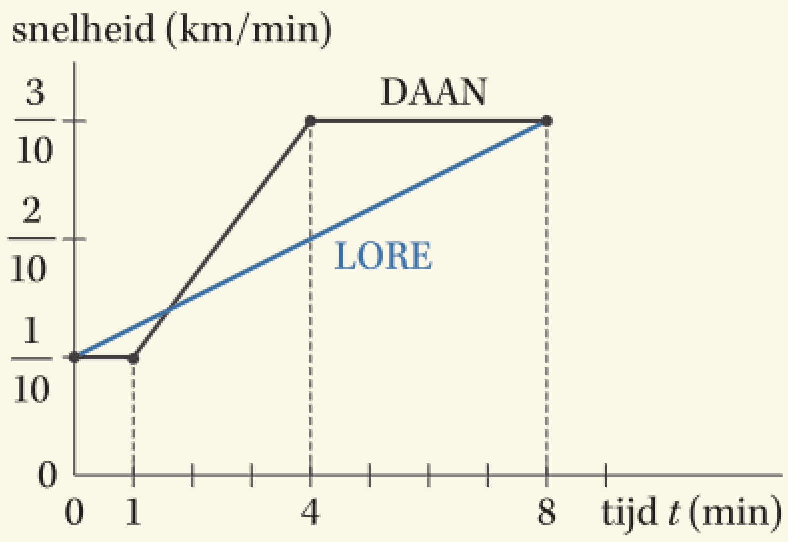
Het aantal liter water dat zich na x minuten in het bad bevindt, berekenen we met de formule $V = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ waarin $f(t)$ de debietfunctie is:

$$f(t) = \begin{cases} 40 & \text{als } 0 \leqslant t \leqslant 14 \\ -10 & \text{als } 14 < t < ? \\ 0 & \text{als } t \geqslant ? \end{cases}$$

1. Bereken met integralen hoeveel water het bad bevat na 10 minuten.
2. Loopt het water over de rand van het bad?
3. Hoeveel water bevat het bad na één uur?
4. Op welk tijdstip is het bad leeg?

21 Een reservoir wordt via een toevoerleiding met water gevuld. Gedurende de eerste 5 seconden neemt het debiet van de leiding gelijkmatig toe tot 10 l/s. Dan blijft het debiet 20 seconden constant tot het reservoir vol is. Hoelang duurt het leegstromen van het reservoir als het uitstroomdebiet 3 l/s bedraagt?

22 Daan en Lore maken een fietstochtje. Hun rijgedrag tijdens de eerste 8 minuten lezen we af op de grafiek.



1 Bepaal de snelheidsfunctie van Lore.

2 Bepaal de snelheidsfunctie van Daan.

3 Hoeveel meter reed Daan tijdens de eerste minuut van de fietstocht?

4 Hoeveel meter heeft Lore afgelegd in de eerste 4 minuten?

5 Hoeveel meter voorsprong heeft Lore na 2 minuten?

6 Hoeveel meter voorsprong heeft Daan na 8 minuten?

7 Wanneer haalt Daan Lore in?

23 Een kabel met een gewicht van 40 N per meter wordt afgerold van een cilinder. De kracht die hiervoor nodig is, is gelijk aan het gewicht van het reeds afgerolde stuk.

1 Bereken de arbeid die nodig is om 10 meter af te rollen.

2 Bereken de arbeid die nodig is om nog eens 20 meter af te rollen.

24 Een stookolieslang heeft een massa van 1,75 kg per meter. Wanneer de olieleverancier de slang van de spoel op de bevoorradingswagen rolt, zal hij hoe langer hoe meer trekkracht moeten gebruiken. Op elk moment is deze kracht gelijk aan het gewicht van de afgerolde slang. Bereken de arbeid die geleverd wordt om een slang van 50 m volledig af te rollen.



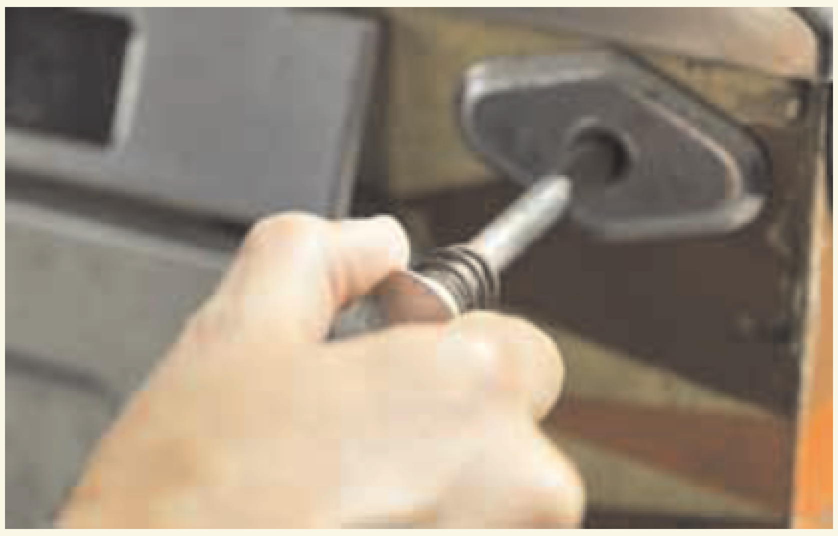
25 Gegeven is een veer met veerconstante k.

1 Welke arbeid moet er geleverd worden om de veer uit te rekken vanuit rust over een afstand d?

2 Welke arbeid is er nodig om de veer vanuit deze eindpositie nog een keer uit te rekken over dezelfde afstand d?

26 Bij een flipperkast moet een balletje in een circuit geschoten worden door aan een staaf met een veertje te trekken en het daarna los te laten. Om het veertje 6 cm samen te drukken, moet je een kracht van 3 N uitoefenen.





1 Bepaal de veerconstante van deze flipperkast.

2 Bereken de arbeid die moet geleverd worden om het veertje 8 cm samen te drukken.

27 De marginale kosten *MK* zijn de extra kosten die ontstaan als de productie met één eenheid toeneemt. Een firma kan haar marginale kosten beschrijven met de functie $MK(q) = 60q + 200$ waarin q het aantal verkochte producten voorstelt.

De totale kosten *TK* in euro bij een productie van x eenheden berekenen we met de formule $TK = \int_0^x MK(q)\,dq$ waarin $MK(q)$ de marginale kostenfunctie is.

1 Wat zijn de totale kosten bij een productie van 50 eenheden?

2 Wat is de meerkost als de productie van 50 eenheden naar 100 eenheden wordt gebracht?

28 Bepaal de stijging van de kostprijs als de marginale kostenfunctie gelijk is aan $MK(q) = 3q^2 - 2q + 4$ en de productie toeneemt van 10 eenheden tot 20 eenheden.

Exploratie

Productiekosten

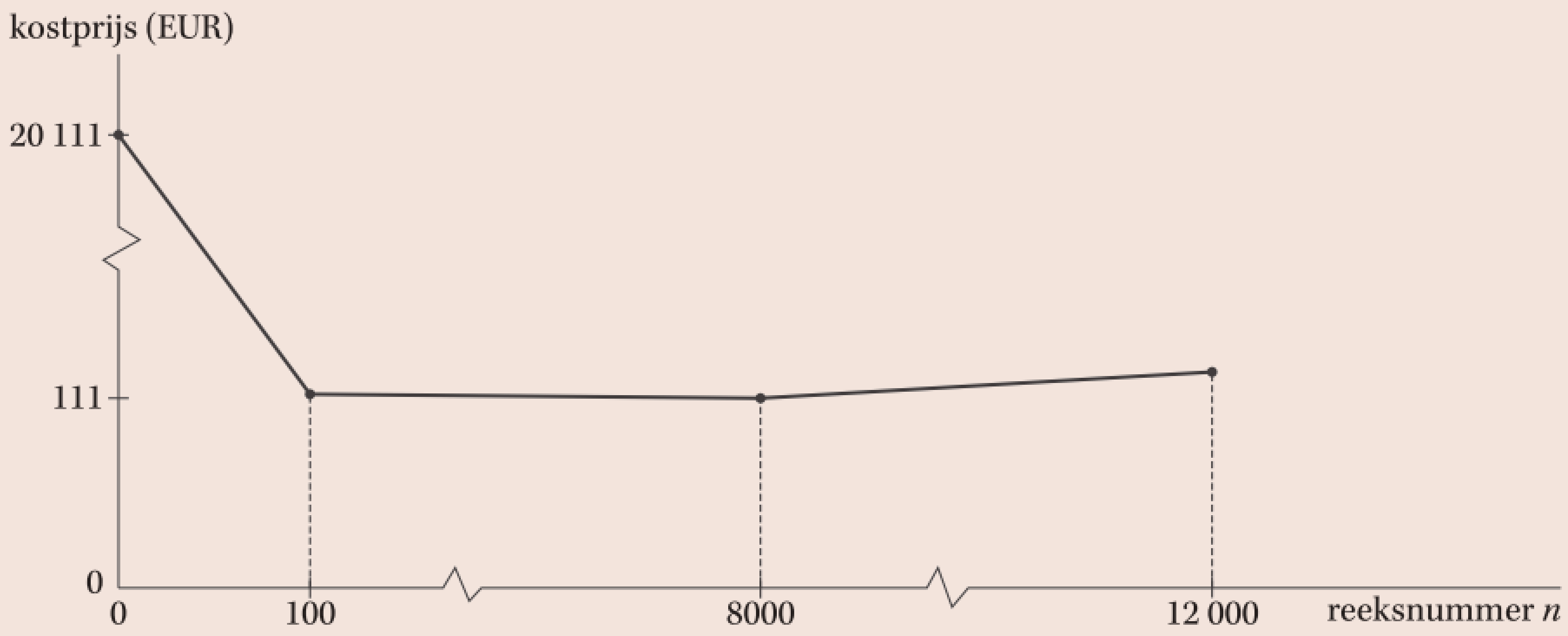
De kostprijs van een lamp is afhankelijk van verschillende factoren.
Er zijn de vaste kosten. Hiertoe behoren de investering in de gebouwen en het machinepark, alsook de loonkosten van het personeel dat niet bij het effectief vervaardigen van de lampen betrokken is. Die laatste post, geschat op 1 miljoen euro per jaar, weegt zwaar door bij het begin van de productie.
De veranderlijke kosten zijn rechtstreeks gekoppeld aan het productieproces. Ze bestaan uit de materiaalkosten, 0,05 euro per lamp, en de loonkosten van de arbeiders die de lampen maken. Berekend op een jaar van 230 werkdagen van 8 uur komen de loonkosten op 0,05 euro per lamp. Wordt de productie opgedreven, dan verhogen de variabele loonkosten door overuren, zondagwerk, shiftpremies enz.
Bij een productie van 6000 lampen per uur met een gemiddeld verlies van 10 % aan defecte lampen, kunnen we de kostprijs voor de productie van de n-de reeks van 1000 lampen beschrijven met de functie f met meervoudig voorschrift:

$$f(n)=\begin{cases} 20\,111-200n & \text{als } 0<n<100 \\ 111 & \text{als } 100\leqslant n<8000 \\ 1{,}6667\cdot 10^{-7}n^2-1{,}6667\cdot 10^{-5}n+100{,}47 & \text{als } 8000\leqslant n\leqslant 12\,000 \end{cases}$$

Zo kunnen we bijvoorbeeld berekenen dat de productie van de eerste reeks van 1000 lampen 19 911 euro kost: $f(1)=20\,111-200\cdot 1=19\,911$.

De productie van de 100e reeks van 1000 lampen kost slechts 111 euro: $f(100)=111$.

In de figuur kunnen we vaststellen dat de grafiek van f uit drie aaneensluitende delen bestaat.



1. In welke productiereeksen zijn de vaste kosten verrekend?
2. Wat is de kostprijs van de 100e tot de 8000e reeks van 1000 lampen?
3. Wat is de kostprijs van 1000 lampen uit deze reeksen als we enkel de materiaalkosten en de normale loonkosten in rekening brengen?
4. Hoe kunnen we het verschil verklaren tussen de antwoorden op de vragen 2 en 3?

5 Hoeveel lampen kunnen er gefabriceerd worden zonder dat de arbeiders moeten overwerken?

Hoe lezen we dat af op de kostprijscurve?

6 Bereken de totale kostprijs voor de productie van 500 000 en 10 000 000 lampen.

7 Stel dat we 2 miljoen lampen kunnen verkopen voor 50 eurocent per lamp, maken we dan winst of verlies?

8 Wat moet de verkoopprijs per lamp zijn als we 1 miljoen lampen willen verkopen zonder verlies?

9 Stel dat we 1 miljoen lampen tegen de kostprijs verkocht hebben en we een bijkomende bestelling binnenhalen om nog eens 10 miljoen lampen te leveren tegen 20 eurocent per lamp. Maken we dan winst of verlies?

Vergelijk de prijs van de lampen uit de twee verkoopcontracten. Hoe kunnen we dit grote verschil verklaren?



Trefwoordenregister

A

Absolute waarde van een functie **88**
Afgeleiden van oppervlaktefuncties **16**
Afstandsfunctie **114**
Arbeid
- bij een constante kracht **120**
- bij een variabele kracht **120**

B

Bepaalde integraal **59**
Bovengrens **59**
Bovensom **50**

C

Constante kracht **120**

E

Exploratie
- productiekosten **133**

F

Functie
- afstandsfunctie **114**
- oppervlaktefunctie **9**
- primitieve functie **23**
- snelheidsfunctie **114**
- versnellingsfunctie **114**

G

Gebied tussen grafieken wentelen om de x-as **109**

H

Hoofdstelling van de integraalrekening **63**

I

Integraalnotatie **58**
Integralen van machten van eerstegraadsfuncties **91**
Integratieconstante **25**
Integreren **25 - 59**

M

Machinerekenen
- bepaalde integralen **83**
- optellen van een eindig aantal oppervlakten **53**

Machtregel **91**

O

Omwentelingslichaam **108**
Onbepaalde integralen
- somregel **29**
- van machtsfuncties $f(x) = x^n$ **23**
- van veeltermfuncties **29**
- veelvoudregel **29**

Ondergrens **59**
Ondersom **50**
Oppervlakte
– tussen de grafieken van twee functies **100**
– van een gebied over een interval **35**
Oppervlakte berekenen met absolute waarde **88**
Oppervlaktefunctie **9**
Oppervlaktefuncties en onbepaalde integraal **35**
Optellen
– van een eindig aantal oppervlakten **48**
– van een oneindig aantal oppervlakten **58**

P

Primitieve functie **23**
Primitieve functies en onbepaalde integraal **24**
Primitieve functies van machtsfuncties $f(x) = x^n$ **24**

R

Rekenregel voor onbepaalde integraal van machtsfuncties $f(x) = x^n$ **25**
Rekenregels voor bepaalde integralen **76**
– gelijke grenzen **76**
– grenzen omwisselen **76**
– optelbaarheid **76**
– somregel **76**
– veelvoudregel **76**
Rekenregels voor onbepaalde integralen **29**
– somregel **29**
– veelvoudregel **29**

S

Snelheidsfunctie **114**
Sommatieteken **49**
Sommeren **49**
Somregel **29 - 76**

T

Tijdsafhankelijke grootheden **114**
Tijdsafhankelijke processen **114**

V

Variabele kracht **120**
Variabele oppervlakte **9**
Veelvoudregel **29 - 76**
Verband tussen oppervlakte en integraal **69**
Verschilhaken **63**
Versnellingsfunctie **114**
Volume van omwentelingslichamen **108**

Z

Zwaartepuntformules **124**



5/6

KRAS DEZE CODE EN ACTIVEER JE BOEK ONLINE OP

WWW.SCOODLE.BE/ACTIVEER

SCOODLE

Code gekrast = geen retour mogelijk

ISBN 978-90-301-4917-0